2023 ズバリ！的中 物理

東京工業大学

結晶中に進む電子線の屈折において、結晶中の内外のド･ブロイ波長を求める問題および、結晶の屈折率を求める問題が的中！

入試問題

前期日程
3〔B〕

河合塾

大学受験科　完成シリーズ
物理演習T　23

$\boxed{3}$ (50 点)

〔B〕 電子は粒子であるとともに物質波(電子波)としても振る舞う。よって電子波の波長が原子間隔程度に短ければ，X 線の場合と同様に結晶の格子による回折が起こる。図 4 のように，結晶は真空中に置かれ，真空中の電位は 0 で一様であり，結晶内部の電位は $\Delta V\,(\Delta V > 0)$ で一様であるとする。ただし，電位の変化は結晶表面近傍の厚さが無視できる範囲内でのみ起こっているとする。電子は電荷を帯びており，電子が真空中から結晶中に入るときに，この電位差 ΔV によって速度が変化し，電子波は結晶表面で屈折する。

静止した電子を，遠方で電位差 V (加速電圧，$V > 0$) で加速させることで平面波の電子線(同じ向きに進む電子の流れ)をつくり，電子の運動エネルギーを失うことなく，結晶表面に電子線を到達させた。紙面内で，結晶表面の法線に対して入射角 $i\,(0^\circ < i < 90^\circ)$ で電子線を入射し，屈折角 r で屈折する場合を考える。表面に平行な格子面で鏡面反射した結晶中の電子波は，法線に対して角度 i で結晶表面から出射する。この際に，表面に平行なすべての格子面で鏡面反射した電子線が同位相で強め合う場合に，電子線回折が起こる(この実験では表面での反射における位相の反転は起こらない)。結晶の表面に平行な格子面の間隔を d，プランク定数を h，電子の質量を m，電子の電荷を $-e\,(e > 0)$ として以下の問いに答えよ。

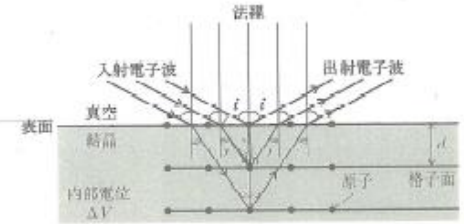

図 4

$\boxed{23}$

次の文中の空欄に，適当な式または数を入れよ。

面 S を境として真空 A と物質 B とが接しており，この面 S で空間の電位が不連続に変わる。電子線が A から B に入射すると，図 1 のように，境界面で光と同じような屈折をする。入射角を θ_1，屈折角を θ_2，A 側での電子の運動量を p_1，B 側での運動量を p_2 とすると，ド・ブロイの物質波の関係から電子線の屈折率 μ は次式で表される。

$$\mu = \frac{\sin\theta_1}{\boxed{(イ)}} = \frac{p_2}{\boxed{(ロ)}} \qquad \cdots(1)$$

電荷 $-e$ [C]，質量 m [kg] の電子を加速電圧 V [V] で加速し，運動エネルギー eV [J] で A 側より入射させる。

電子の電気的な位置エネルギーを A 側で 0 [J]，B 側で $-eV_0$ [J] とすれば，

$$eV = \frac{{p_1}^2}{2m} = \boxed{(ハ)} - eV_0 \qquad \cdots(2)$$

の関係がある。したがって，電子の A 側での波長 λ_1，B 側での波長 λ_2 は，eV および eV_0 を用いて表すと，それぞれ

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{\boxed{(ニ)}}},\quad \lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{\boxed{(ホ)}}} \qquad \cdots(3)$$

ここで，h [J・s] はプランク定数である。したがって，μ は V，V_0 を用いて

$$\mu = \sqrt{\boxed{(ヘ)}} \qquad \cdots(4)$$

で表される。また，(3)の第一式は，λ_1 を [m] で表すと

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{150}{V\,[\mathrm{V}]}} \times 10^{-10}\ [\mathrm{m}] \qquad \cdots(5)$$

である。

次に，図 2 のように電子線が真空 A から結晶格子 B に入射する場合を考える。この場合，光と同じように回折や干渉を生じる。いま，境界面 S に平行な，面間隔 d なる格子面による電子線の反射(ブラッグ反射)を考える。隣り合っている格子面によって反射される電子線は，それらの道のりの差(経路差)が波長の整数倍になるときだけ強めあう。したがって，格子面による反射線は強めあう方向だけに観察される。

入射波の波長を λ_1，入射角を θ_1，結晶中での波長を λ_2，屈折角を θ_2 とすると，この強めあう条件は，次式で表せる。

$$n\lambda_2 = \boxed{(ト)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots(6)$$

(1)式を用いて(6)式を λ_2，および θ_1 で表すと，

$$\mu^2 - 1 = \boxed{(チ)} - \cos^2\theta_1 \qquad \cdots(7)$$

が成立する。

B が岩塩の場合には，内部電位 V_0 は 7.7 V，格子面の間隔は 2.8×10^{-10} m である。

(d) 電子の粒子としての速さについて，真空中における値 v_V と，結晶中における値 v_C を，h，m，e，V，ΔV の中から必要なものを用いて表せ。

(e) 電子波の真空中での波長 λ_V と，結晶中での波長 λ_C を，h，m，e，V，ΔV の中から必要なものを用いて表せ。

(f) 図5のように入射電子波がYに到達したときの波面XYが，屈折電子波の波面X′Y′へと進む際に，真空中での経路XX′における位相変化と結晶中の経路YY′における位相変化は等しい。このことを利用して，電子線が真空から結晶に入射するときの屈折率 $n_r = \dfrac{\sin i}{\sin r}$ を，h，m，e，V，ΔV の中から必要なものを用いて表せ。ただし，電子の粒子として進む速さと，電子波の波面が進む速さは異なり，$n_r = \dfrac{v_V}{v_C}$ とはならない。

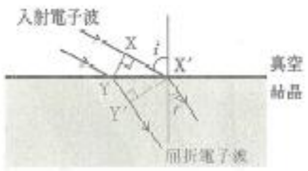

図5

(g) 真空中と結晶中で，電子の粒子としての運動量がどう変化したかを考える。結晶中で，電子の粒子としての運動を観測したところ，問(f)の屈折電子波と同じ方向に運動していることが分かった。結晶中の運動量の，表面に平行な成分の大きさ $p_{\parallel}$ と，表面に垂直な成分の大きさ $p_{\perp}$ を，v_V と i を必ず含め，h，m，e，ΔV の中から必要なものを用いて表せ。

(h) いろいろな加速電圧 V でつくった電子線を用いて，ある入射角 i と反射角 i で電子線回折を起こすかどうかを調べたところ，複数の V において回折条件を満たすことが分かった。回折条件を満たす V を，h，m，e，d，ΔV，i，整数 n の中から必要なものを用いて表せ。ただし，解が存在するための n の条件は答えなくてよい。

電子の加速電圧を 60 kV とすると，第二次反射（$n=2$）にたいして $\cos^2\theta_1$ の値は，有効数字2桁で $\boxed{(リ)}$ となる。

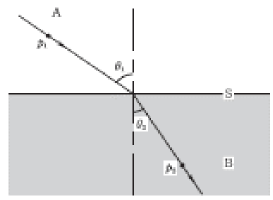

図1

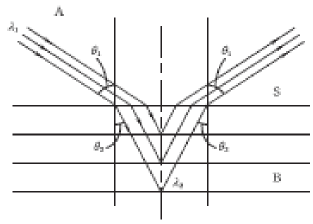

図2