2022 ズバリ！的中 数学

広島大学

$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$に対して、漸化不等式を示して、数列の極限を求める　問題が的中

入試問題

前期日程
数学［5］（4）

〔5〕　次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を $\boxed{f(x) = \sqrt{2}^{\,x}}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2, f(2))$ における接線の方程式を，実数 m，k を用いて $y = mx + k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める。すべての実数 x に対して $f(x) \geqq mx + k$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して

$$2 - a_{n+1} \leqq (\log 2) \cdot (2 - a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e = 2.718\cdots$ であることを用いてよい。

— 12 —

河合塾

大学受験科　完成シリーズ
数学微・積分演習
第12講　12・1（4）、（5）

42

第12講

総合演習　(6)

演　習

12・1

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．

また，$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ とする．

(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f'(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3)　$0 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成立することを数学的帰納法を用いて示せ．

(4)　$0 < 2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成立することを示せ．

(5)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．