

[ I ] 自然数  $n$  について、次のような命題を考える。

(\*)  $n^2 + 1, 2n^2 + 3, 6n^2 + 5$  がすべて素数である

(1)  $n = 5k$  ( $k$  は自然数) のとき、 $n$  は (\*) を満たさないことを示せ。

(2) (\*) を満たすような  $n$  は  $n = 1, 2$  のみであることを示せ。

[ II ]  $n$  は 3 以上の自然数とする。面積 1 の正  $n$  角形  $P_n$  を考え、その周の長さを  $L_n$  とする。次の問に答えよ。

(1)  $(L_n)^2$  を求めよ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$  を求めよ。

(3)  $n < k$  ならば  $(L_n)^2 > (L_k)^2$  となることを示せ。

[ III ] 実数  $x$  に対し  $[x]$  を  $x - 1 < [x] \leq x$  を満たす整数とする。次の極限を求めよ。

(1) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right]$$

(2) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left( 1 + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{n}] \right)$$