

1

図に示すような、球状の惑星 Q の中心 O を通るまっすぐな細い穴を考える。この穴に沿って O を原点とする x 軸をとる。図で穴の下端と上端の x 座標の値は、それぞれ $-R$ と R である。穴の占める体積は惑星 Q の体積に比べて無視することができ、惑星 Q の半径は R 、密度は ρ で一定である。また、惑星 Q には大気がなく、自転していないものとする。万有引力定数を G として、以下の問に答えよ。

- (1) x 軸上の位置 $x \geq R$ にある質量 m の物体 A にはたらく力 f と、力 f による位置エネルギー U を答えよ。ただし、 x 軸の正方向にはたらく力の符号を正とし、位置エネルギーの基準は無限遠とする。
- (2) 惑星 Q の表面 ($x = R$) から x 軸の正方向に物体 A を速さ v_0 で発射して、 $x = 3R$ の位置まで到達させたい。そのために必要な最小の初速 v_0 を求めよ。
- (3) 惑星 Q の表面 ($x = R$) から x 軸に垂直な方向に物体 A を速さ u_0 で発射して、 x 軸上の位置 $x = -3R$ を通過させたい。そのために必要な初速 u_0 を求めよ。
- (4) 物体 A が穴の中の位置 x ($-R < x < R$) にある場合に、惑星 Q から受ける力 f を考える。O を中心とする半径 $|x|$ の球面内の質量を M' とすると、力 f は惑星中心 O に集中した質量 M' から物体 A が受ける万有引力に等しい。質量 M' と力 f を求めよ。
- (5) 物体 A にはたらく力 f を x の関数としてグラフに表せ。グラフには $x = \pm R$ の位置での f の値も記入せよ。
- (6) 惑星 Q の表面から物体 A を初速ゼロで穴に落とした場合、物体 A はどのような運動をするか述べよ。
- (7) (6)の場合に、物体 A が惑星表面から中心 O に最初に達するまでの時間 t_1 と、中心 O における速さ v_1 を求めよ。
- (8) 物体 A を惑星中心 O から x 軸の正方向に速さ v_2 で発射し、惑星 Q の表面を乗り越して $x = 3R$ の位置まで到達させたい。そのために必要な最小の初速 v_2 を求めよ。

