

# 1

図に示すような、球状の惑星 Q の中心 O を通るまっすぐな細い穴を考える。この穴に沿って O を原点とする  $x$  軸をとる。図で穴の下端と上端の  $x$  座標の値は、それぞれ  $-R$  と  $R$  である。穴の占める体積は惑星 Q の体積に比べて無視することができ、惑星 Q の半径は  $R$ 、密度は  $\rho$  で一定である。また、惑星 Q には大気がなく、自転していないものとする。万有引力定数を  $G$  として、以下の問に答えよ。

- (1)  $x$  軸上の位置  $x \geq R$  にある質量  $m$  の物体 A にはたらく力  $f$  と、力  $f$  による位置エネルギー  $U$  を答えよ。ただし、 $x$  軸の正方向にはたらく力の符号を正とし、位置エネルギーの基準は無限遠とする。
- (2) 惑星 Q の表面 ( $x = R$ ) から  $x$  軸の正方向に物体 A を速さ  $v_0$  で発射して、 $x = 3R$  の位置まで到達させたい。そのために必要な最小の初速  $v_0$  を求めよ。
- (3) 惑星 Q の表面 ( $x = R$ ) から  $x$  軸に垂直な方向に物体 A を速さ  $u_0$  で発射して、 $x$  軸上の位置  $x = -3R$  を通過させたい。そのために必要な初速  $u_0$  を求めよ。
- (4) 物体 A が穴の中の位置  $x$  ( $-R < x < R$ ) にある場合に、惑星 Q から受ける力  $f$  を考える。O を中心とする半径  $|x|$  の球面内の質量を  $M'$  とすると、力  $f$  は惑星中心 O に集中した質量  $M'$  から物体 A が受ける万有引力に等しい。質量  $M'$  と力  $f$  を求めよ。
- (5) 物体 A にはたらく力  $f$  を  $x$  の関数としてグラフに表せ。グラフには  $x = \pm R$  の位置での  $f$  の値も記入せよ。
- (6) 惑星 Q の表面から物体 A を初速ゼロで穴に落とした場合、物体 A はどのような運動をするか述べよ。
- (7) (6)の場合に、物体 A が惑星表面から中心 O に最初に達するまでの時間  $t_1$  と、中心 O における速さ  $v_1$  を求めよ。
- (8) 物体 A を惑星中心 O から  $x$  軸の正方向に速さ  $v_2$  で発射し、惑星 Q の表面を乗り越して  $x = 3R$  の位置まで到達させたい。そのために必要な最小の初速  $v_2$  を求めよ。

