第5講 ベクトル

例題 5・1

三角形OABがあり，点Pはこの三角形と同じ平面上を

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

を満たしながら動くものとする．このとき，Pはどのような図形上にあるか．

解答

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}},$$

すなわち，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$$

より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2.$$

辺ABの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2,$$

すなわち，

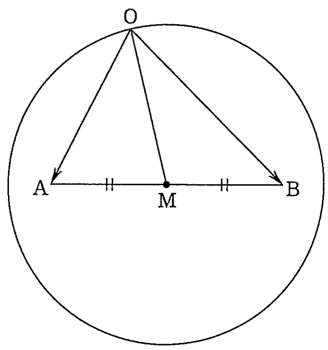
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|.$$

よって，Pは

辺ABの中点Mを中心とし，Oを通る円

上にある．



☜ 中心C，半径 r の円のベクトル方程式は

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$$

であるから，この式は中心M，半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ の円を表す．

練習

5・3

O を原点とする座標空間に 3 点 A(3, 0, 1), B(0, 2, 1), C(0, 0, 4) がある.

(1) 三角形 OAB の面積を求めよ.

(2) 3 点 O, A, B を通る平面を α とする. C と α の距離を求めよ.

(3) 点 P が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たしながら動くとき, P はどのような図形上にあるか.

(4) P が(3)の図形上を動くとき, 四面体 OABP の体積の最大値を求めよ.

5・4 1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている．点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを2:1に内分する点Rが通り得る範囲の面積を求めよ．

（東京大学）