第2講 数列(2)

1 数列の帰納的定義

「初めからいくつかの項」と「それをもとにして順に項の値をただ1通りに定めていく規則」を与えて数列を定めることを**数列の帰納的定義**という．また，いくつかの項の間の関係式で，数列の項を順に決めていく規則を与えるものを**漸化式**という．

例1　次の漸化式により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$a_1=4,\ a_{n+1}=5a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解　(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項2，公差3の等差数列である．

よって，一般項 a_n は，

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項4，公比5の等比数列である．

よって，一般項 a_n は，

$$a_n=4\cdot 5^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

2 数学的帰納法

数列 $\{a_n\}$ において，初項 a_1 と，a_k から a_{k+1} を求める規則が与えられているとき，すべての正の整数 n に対して a_n を定めることができる．

これと似た考え方によって，正の整数 n に関する命題が，すべての正の整数 n に対して成り立つことを示す方法がある．

$P(n)$ を正の整数 n に関する命題とする．

「すべての正の整数 n に対して $P(n)$ が成り立つ」　…(*)

ことを示すには，次の［Ⅰ］，［Ⅱ］を示せばよい．

［Ⅰ］　$P(1)$ が成り立つ．

［Ⅱ］　正の整数 k に対して $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ も成り立つ．

このような手順で(*)を示す証明法を**数学的帰納法**という．

また，命題 $P(n)$ によっては，次の[Ⅰ]′，[Ⅱ]′ や[Ⅰ]″，[Ⅱ]″ を示す場合もある．

[Ⅰ]′　$P(1)$，$P(2)$ が成り立つ．

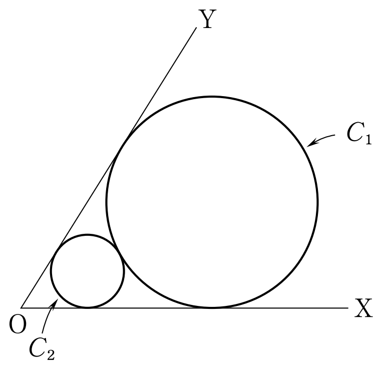
[Ⅱ]′　正の整数 k に対して $P(k)$，$P(k+1)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+2)$ も成り立つ．

[Ⅰ]″　$P(1)$ が成り立つ．

[Ⅱ]″　正の整数 k に対して $P(1)$，$P(2)$，$\cdots$，$P(k)$ のすべてが成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ も成り立つ．

練習

2・1 平面上に，$\angle \mathrm{XOY}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす半直線 OX と OY の両方に接する半径 1 の円 C_1 があり，OX，OY，C_1 によって囲まれた領域内に，OX，OY，C_1 のすべてに接する円 C_2 を作る．



同様にして，OX，OY，C_n によって囲まれた領域内に，OX，OY，C_n のすべてに接する円 C_{n+1} を作ることを繰り返す．

C_n の面積を S_n とするとき，$\sum_{k=1}^{n} S_k$ を n の式で表せ．

2・2 n は正の整数とし，2 種類の文字 A，B を繰り返し用いることを許して左から順に n 個並べる．ただし，A の次は必ず B であり，B の次は A，B いずれでもよいものとする．

このような規則を満たす文字列の総数を x_n とするとき，x_n を求めよ．

2・3　各項が正である数列 $\{a_n\}$ を，

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2=\dfrac{1}{6}a_na_{n+1}(2a_{n+1}-1) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

により定める．このとき，一般項 a_n を求めよ．