

第2講 指数・対数関数

1 指数の拡張と指数法則

指数が0または負の整数のときの累乗を次のように定める。

$a \neq 0$, n が正の整数のとき,

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

また, 次のように定める。

$a > 0$, m, n が正の整数, p が有理数のとき,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

特に, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

指数について, 次の指数法則が成り立つ。

$a > 0$, $b > 0$, p, q が実数のとき,

$$[1] \quad a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$[2] \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$[3] \quad a^p b^p = (ab)^p, \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

例1 $3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}} = 3^{\frac{4}{5} + \frac{6}{5}} = 3^2 = 9.$

$$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{-6} = 2^{\frac{2}{3} \times (-6)} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

問1 次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{3^{\frac{7}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}$

(2) $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{-8}$

2・3 a を実数の定数とする. x についての2つの不等式

$$1 + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_5 x} < 0, \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a \log_3 2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \quad \dots \textcircled{2}$$

がある.

- (1) ①, ② の不等式をそれぞれ解け.
- (2) ① の解がすべて ② を満たすような a の値の範囲を求めよ.