第 1 講　図　形

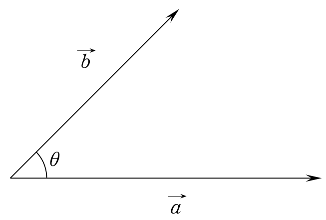
例題　1・1

三角形 OAB において，OA＝2，OB＝3，AB＝4 とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

(2)　点 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

解答へのアプローチ

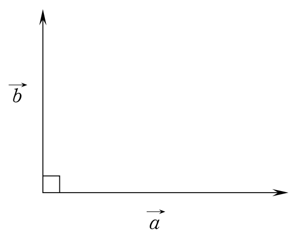


$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である．$\vec{a}=\vec{0}$ または，$\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める．

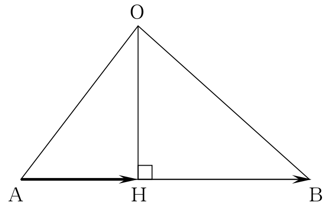
ここでは，余弦定理を用いれば，$\cos\angle\mathrm{AOB}$ が得られるのでそれを利用すればよい．



また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ のときに限り，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である．すなわち，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ である．



ここで，H は辺 AB 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad (t\ は実数)$$

とおくことができて，これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が得られるので，あとは，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ により，t を求めればよい．

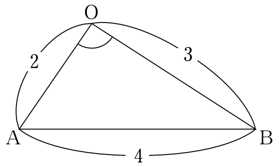
解答

(1)　三角形 OAB に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle \mathrm{AOB}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{4}$$

であるから，内積の定義より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle \mathrm{AOB}\\&=2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\&=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$



◀ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$

であることを用いて，

$$4^2=3^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{3}{2}$$

としてもよい．

(2)　H は辺 AB 上にあるから，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことができる．さらに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

と変形することができて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，

$$\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$-(1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0$$

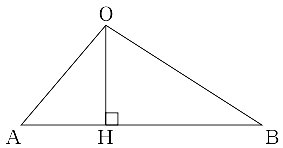
つまり，

$$-(1-t)\cdot 2^2+(1-2t)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+t\cdot 3^2=0$$

$$t=\frac{11}{32}.$$

よって，① より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{21}{32}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{11}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

◀ 

$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=t:(1-t)$

とおいて，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

としてもよい．

◀ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=3$，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{3}{2}$ である．

演 習

1・1

三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{13}$，$\mathrm{AC}=4$，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ とする．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．また，三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に $\mathrm{BD}=2$ となるように点 D をとる．三角形 ACD の外接円と辺 AB の交点のうち A でない方を E とするとき，BE の長さを求めよ．また，三角形 ADE の面積を求めよ．

1・2

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$，$\mathrm{B}(2,\ 5)$ を通り，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と共有点をもつ円 C を考える．

(1) 線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2) 円 C の半径 r の最小値を求めよ．