第４講

微分法，積分法

基礎の確認 4・1

(1) $f'(x)>0$ のとき，$f(x)$ は増加する．

$f'(x)<0$ のとき，$f(x)$ は減少する．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

ポイントチェック

(1) $f(x)=x^3+2x+1$ のとき，$y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+2x+4$ 上の点 $(t,\ t^2+2t+4)$ における接線を l とする．

(i) l の方程式を求めよ．

(ii) 原点から放物線 $y=x^2+2x+4$ に引ける接線の方程式を求めよ．

<ポイントチェック解答>

(1) 求める方程式は，$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ である．

$f(x)=x^3+2x+1$，$f'(x)=3x^2+2$ より，

$$f(1)=1^3+2\cdot1+1=4, \qquad f'(1)=3\cdot1^2+2=5$$

であるから，

$$y-4=5(x-1).$$

$$y=5x-1.$$

(2)(i) l の方程式は，

$$y-(t^2+2t+4)=(2t+2)(x-t).$$

$$y=(2t+2)x-t^2+4.$$

(ii) l が原点を通るとき，

$$0=-t^2+4.$$

$$t=\pm2.$$

よって，求める方程式は，

$$y=6x, \qquad y=-2x.$$

演 習

4・1

関数 $f(x)=x^3-3x^2-3x-1$ がある．

(1) $f(x)$ の極値を与える x の値を求めよ．また，極大値と極小値の和を求めよ．

(2) 原点から曲線 $y=f(x)$ に引ける接線の方程式を求めよ．

基礎の確認 4・2

⑴　方程式 $f(x)=a$ の実数解は

$y=f(x)$ のグラフと $y=a$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．

ポイントチェック 1

3 次方程式

$$x^3-3x-a=0$$

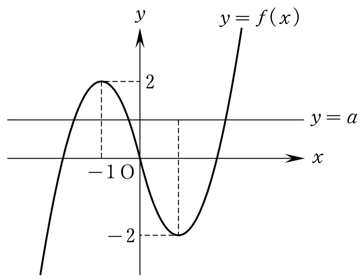
が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a のとりうる値の範囲を求めよ．

<ポイントチェック 1 解答>

$x^3-3x=a$ より，$f(x)=x^3-3x$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．

よって，$y=f(x)$ のグラフと $y=a$ のグラフより，求める a の値の範囲は

$$-2<a<2.$$



⑵
$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ C:\text{積分定数}).$$

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ のとき，

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha).$$

ポイントチェック 2

$f(x)$ が次のように定義されているとき，$\int_0^2 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ -x^2+3x-2 & (1\leqq x).\end{cases}$$

<ポイントチェック 2 解答>

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx&=\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx\\&=\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\Big]_1^2\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

演 習

4・2

次の問に答えよ．

(1)　3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ は相異なる 3 つの実数解をもつことを示せ．

(2)　$x^3-3x+1=0$ の解で最小のものを α，最大のものを β とする．このとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{\alpha}^{\beta}|x^2-1|\,dx.$$

基礎の確認 4・3

(1)　2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフと2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$

(2)　定積分について，次の式が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.$$

ポイントチェック

(1)　放物線 $y=x^2$，x 軸，直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2-5x-3$ を C とする．

(i)　C と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(ii)　C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(iii)　C と $y=-x^2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

＜ポイントチェック解答＞

(1)　求める面積は，

$$\int_0^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9.$$

(2)(i)　$x^2-5x-3=0$ より，

$$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

(ii)　$\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}=\alpha$，$\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}=\beta$ とすると，α，β は方程式 $x^2-5x-3=0$ の2解であるから，

$$x^2-5x-3=(x-\alpha)(x-\beta).$$

よって，求める面積は，

$$\begin{aligned}-\int_\alpha^\beta (x^2-5x-3)\,dx&=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2}-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)^3\\&=\frac{1}{6}(\sqrt{37})^3=\frac{37\sqrt{37}}{6}.\end{aligned}$$

(iii)　$x^2-5x-3=-x^2$ より，

$$2x^2-5x-3=0.\qquad (2x+1)(x-3)=0.\qquad x=-\frac{1}{2},\ 3.$$

$2x^2-5x-3=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3)$ であるから，求める面積は，

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^3 \{-x^2-(x^2-5x-3)\}\,dx&=-2\int_{-\frac{1}{2}}^3\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)\,dx\\&=\frac{2}{6}\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3=\frac{343}{24}.\end{aligned}$$

演 習

4・3

2点 A(0, 1), B(3, 4) と曲線 C_1: $y=x^2+3x+4$ を考える.

(1) 点 P が C_1 上を動くとき, 3点 A, B, P を頂点とする三角形の重心が描く曲線 C_2 の方程式を求めよ.

(2) C_1 と (1) の曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ.