第4講 総合演習 (4)

演習

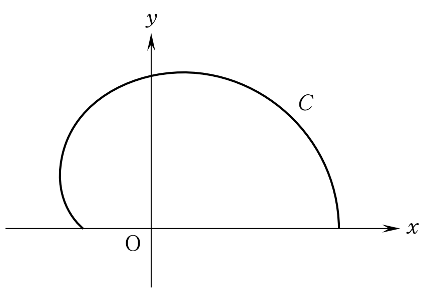
4・1 関数 $f(x)=\log(1+x^2)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減および C の凹凸を調べ，C の概形をかけ．

(3) 2点 $(1,\ f(1))$，$(-1,\ f(-1))$ における C の接線をそれぞれ l，m とする．このとき，C，l，m で囲まれる図形の面積を求めよ．

4・2 曲線 C: $\begin{cases} x=\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta \\ y=\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$



について，次の問に答えよ．

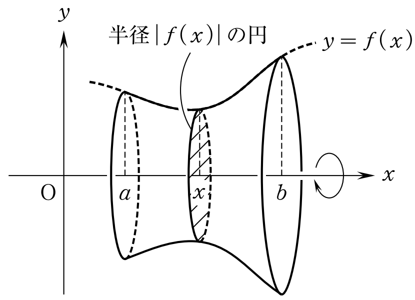
(1) C の長さを求めよ．

(2) C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

B 回転体の体積

曲線 $y=f(x)$ の $a\leqq x\leqq b$ の部分と x 軸，および，2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$



6 曲線の長さ・道のり

曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

とくに，$x=t$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}$，$dx=dt$ であるから，次のようになる．

曲線 $y=g(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx$$

7 区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

8 積分と不等式

$f(x)$，$g(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ において連続であるとき，

(1) **$a\leqq x\leqq b$ でつねに $f(x)\geqq 0$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$**

(等号は $a\leqq x\leqq b$ でつねに $f(x)=0$ であるときのみ成立)

(2) **$a\leqq x\leqq b$ でつねに $f(x)\geqq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx\geqq \int_a^b g(x)\,dx$**

(等号は $a\leqq x\leqq b$ でつねに $f(x)=g(x)$ であるときのみ成立)