

発展4

一般に、数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n = a_{n+1} - a_n$ で定義される数列 $\{b_n\}$ を、数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

(1) $a_n = n^2(n-1)^2$ ($n \geq 1$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を求めよ。また、

これを利用して $\sum_{k=1}^n k^3$ を求めよ。

(2) $c_n = n^3(n-1)^3$ ($n \geq 1$) で定義される数列 $\{c_n\}$ の階差数列 $\{d_n\}$ を求めよ。また、

これを利用して $\sum_{k=1}^n k^5$ を求めよ。

(類題：北見工大)