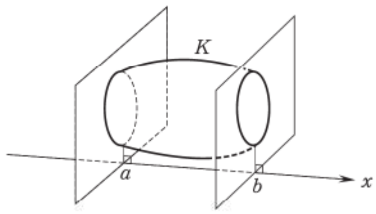
第5講 積　分　法 (3)

基本事項

❶ 立体の体積

座標空間内に，x 軸に垂直な 2 つの平面 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ の間にはさまれる立体 K がある．



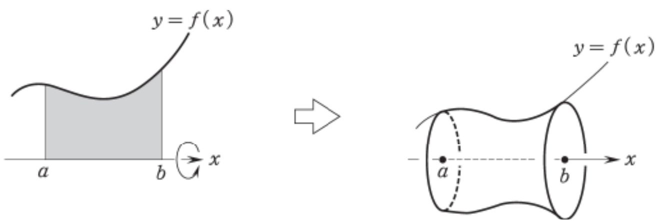
x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(a \leqq t \leqq b)$ で立体 K を切ったときの切り口の面積を $S(t)$ とすると，立体の体積 V は

$$V=\int_a^b S(t)\,dt.$$

❷ 回転体の体積

$a<b$，$c<d$ とする．

(1) **x 軸まわりの回転体**



曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V_1 は

$$V_1=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx.$$

例題 2

1 辺の長さが 2 の正三角形を底面とし，高さが 2 である三角柱があり，底面の 1 辺を含む直線を軸としてこの立体を 1 回転してできる立体を K とする．

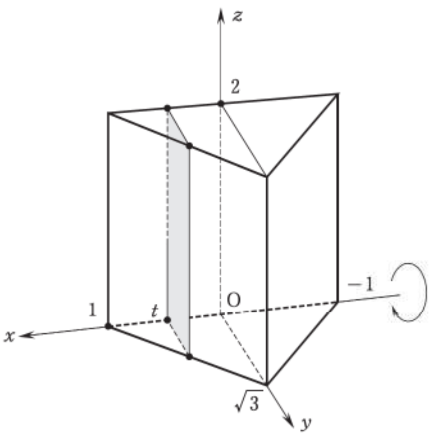
K の体積を求めよ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（東京理科大　改）**

考え方

まず，題意の三角柱を座標空間に設定する．その際，立体の対称性などに注目する．この場合，x 軸に底面の一辺を含め，yz 平面に関して三角柱が対称になるように設定するとよい．この三角柱を平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面（長方形）を x 軸のまわりに 1 回転させたときの通過領域が K の平面 $x=t$ による断面であることに注目する．

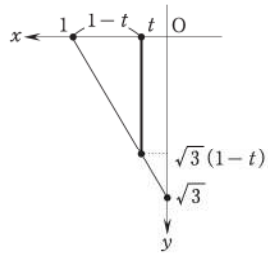
その面積 $S(t)$ が求まれば，定積分 $2\int_0^1 S(t)\,dt$ を計算することで求める体積が得られる．

解

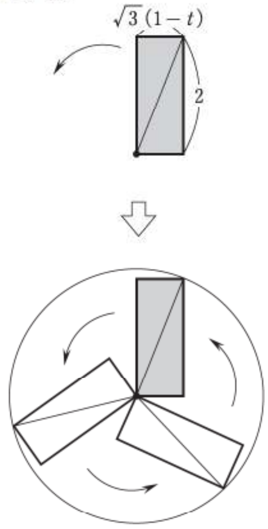


題意の三角柱に対して，x 軸，y 軸，z 軸を上図のように設定する．平面 $x=t$ $(0\leqq t<1)$ で切ると，切り口はとなりあう 2 辺の長さが $\sqrt{3}(1-t)$, 2 の長方形である．

これを x 軸のまわりに 1 回転させたときの通過領域は半径 $\sqrt{\{\sqrt{3}(1-t)\}^2+2^2}=\sqrt{3(t-1)^2+4}$ の円の周と内部であり，それが立体 K の平面 $x=t$ による断面と一致する．

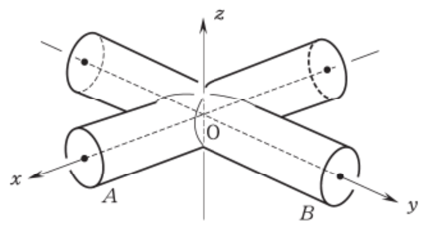


上の図で相似を利用すると長方形の 1 辺の長さは $\sqrt{3}(1-t)$ とわかる．



5・3 xyz 空間内に x 軸を中心軸とする円柱 A と y 軸を中心軸とする円柱 B があり，x 軸に垂直な平面による円柱 A の切り口と y 軸に垂直な平面による円柱 B の切り口はともに半径を 1 とする円である．

円柱 A と円柱 B の共通部分の体積を求めよ．



（近畿大　類）

☆ 問題を解き終えたら〈**チェックシート**〉に記入しましょう．