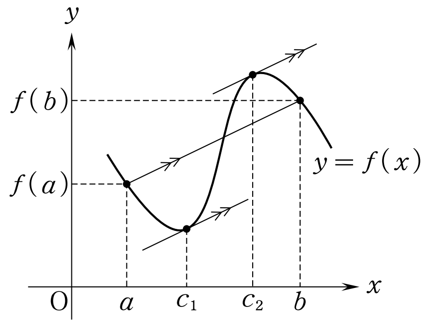
⓰ 平均値の定理

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たす c が，a と b の間に少なくとも1つ存在する．



⓱ 曲線の媒介変数表示

座標平面上を運動する点 P の描く曲線を C とする．

時刻 t における動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標，y 座標は，ともに t の関数であるから，

$$x=f(t),\qquad y=g(t) \qquad\cdots(*)$$

と表すことができる．

$(*)$ によって定まる点 P の軌跡が，C である．

一般に，C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が，ある変数 t を用いて，$(*)$ のように表されるとき，t を**媒介変数**といい，$(*)$ を C の**媒介変数表示**という．

⓲ 媒介変数で表された関数の微分法

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とすると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\quad \left(\text{ただし，}\frac{dx}{dt}=f'(t)\neq 0\text{ とする}\right)$$

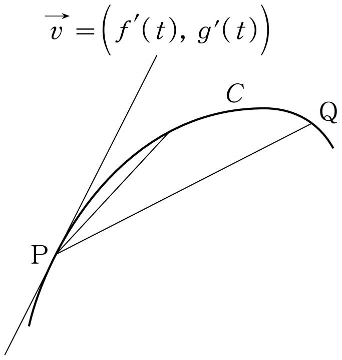
（解説）

$x=f(t)$，$y=g(t)$ によって表される曲線を C とし，C 上に2点

$$\mathrm{P}(f(t),\ g(t)),\ \mathrm{Q}(f(t+h),\ g(t+h))\ (h\neq 0)$$

をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(f(t+h)-f(t),\ g(t+h)-g(t)).$$



したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h},\ \frac{g(t+h)-g(t)}{h}\right)$$

となる．

ここで，$h \longrightarrow 0$ とすると，Q は P に近づき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の向きは，点 P における曲線 C の接線の方向に限りなく近づく．

したがって，

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h},\ \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\right)=\big(f'(t),\ g'(t)\big)$$

で定まるベクトル，すなわち，

$$\overrightarrow{v}=\big(f'(t),\ g'(t)\big)$$

は，点 P における C の接ベクトル（接線の方向ベクトル）となる．

したがって，接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ は $\overrightarrow{v}$ の成分の比の値 $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ で与えられることになる．

（解説終り）

例　$x=t^2,\ y=t^3+t\ (t\neq 0)$ のとき，

$$\frac{dx}{dt}=2t,\qquad \frac{dy}{dt}=3t^2+1.$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t}.$$

例題 5

a が $a>0$ の範囲を動くとき，xy 平面の曲線 $y=a^2x^2+\dfrac{2}{a}$ が動く範囲を求め図示せよ．

【解答】

［解 1］

$$y=a^2x^2+\frac{2}{a}\ (a>0) \qquad \cdots ①$$

$x=X$ と固定すると

$$y=X^2a^2+\frac{2}{a}\ (a>0)$$

は a の関数である．そこで，

$$F(a)=X^2a^2+\frac{2}{a}$$

とおいて，$a>0$ における $y=F(a)$ の値域を調べる．

(i) $X=0$ のとき

$$F(a)=\frac{2}{a}\ \text{より，}F(a)\ \text{の値域は，}y>0.$$

(ii) $X\neq 0$ のとき

$$F'(a)=2X^2a-\frac{2}{a^2}$$

$$=\frac{2X^2}{a^2}\left(a^3-\frac{1}{X^2}\right)$$

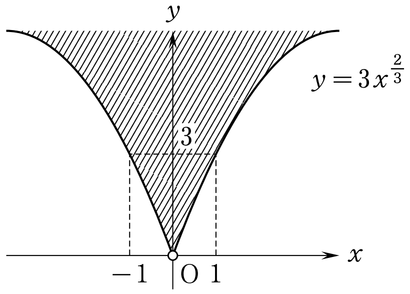
a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{X^2}}$	$\cdots$	(∞)
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	(∞)	$\searrow$	$3X^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	(∞)

ゆえに，① 上の x 座標が X である点 $(x,\ y)$ のとり得る範囲は

$$\begin{cases} X=0\ \text{のとき}\quad 0<y\ \text{を満たす}\ (x,\ y)\ \text{全体} \\ X\neq 0\ \text{のとき}\quad 3X^{\frac{2}{3}}\leqq y\ \text{を満たす}\ (x,\ y)\ \text{全体} \end{cases}$$

である．したがって $x=X$ を動かして考えることにより ① が動く範囲は

$$y \geqq 3x^{\frac{2}{3}}, \quad (x,\ y) \neq (0,\ 0)$$



したがって，求める範囲は上図のようになる（境界含む，ただし点 (0，0) は除く）．

［解 2］

$$y=a^2x^2+\frac{2}{a}\ (a>0) \qquad \cdots ①$$

「$a>0$ を動くとき，① が点 $(X,\ Y)$ を通る」

$\iff$ 「$Y=a^2X^2+\dfrac{2}{a}$ を満たす正の実数 a が存在する」

$\iff$ 「a の方程式

$X^2a^3-Ya+2=0$

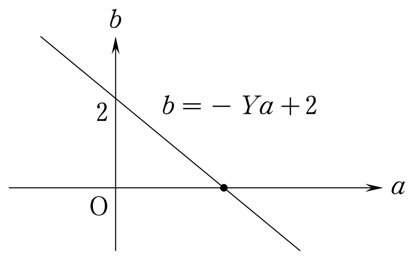
が $a>0$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ」 $\cdots(*)$

$G(a)=X^2a^3-Ya+2$ とおく．

(i) $X=0$ のとき

$G(a)=-Ya+2$ より

$(*) \iff -Y<0 \iff Y>0$



(ii) $X \neq 0$ のとき

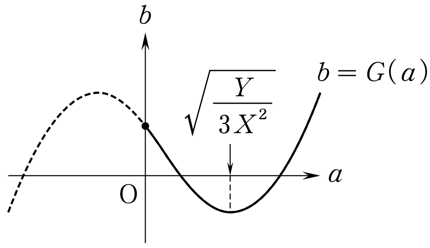
$$G'(a)=3X^2a^2-Y=3X^2\left(a^2-\frac{Y}{3X^2}\right)$$

㋐ $Y \leqq 0$ のとき $G'(a) \geqq 0$ より $G(a)$ は $a>0$ において単調増加であり，$G(0)=2>0$ より $a>0$ において $G(a)>0$ だから $(*)$ は成り立たない．

㋑ $Y>0$ のとき

$$G'(a)=3X^2\left(a-\sqrt{\frac{Y}{3X^2}}\right)\left(a+\sqrt{\frac{Y}{3X^2}}\right)$$

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{Y}{3X^2}}$	$\cdots$
$G'(a)$		$-$	0	$+$
$G(a)$	(2)	↘	極小	↗



よって，

$$(*) \iff G\left(\sqrt{\frac{Y}{3X^2}}\right)=-\frac{2Y}{3}\sqrt{\frac{Y}{3X^2}}+2\leqq 0$$

$$\iff Y\geqq 3X^{\frac{2}{3}}$$

(i), (ii) より，求める範囲は

$$x=0 \text{ のとき } y>0, \quad x\neq 0 \text{ のとき } y\geqq 3x^{\frac{2}{3}}$$

つまり

$$y\geqq 3x^{\frac{2}{3}},\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

である（以下，［解 1］と同様）．