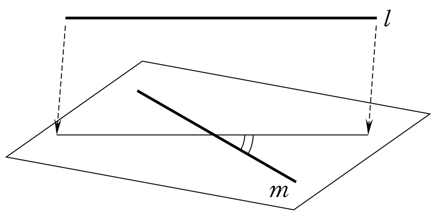
第5講 空間ベクトル

1 平面，直線の位置関係

A 空間の2直線のなす角



空間における異なる2直線 l, m について，l, m のなす角を考える．

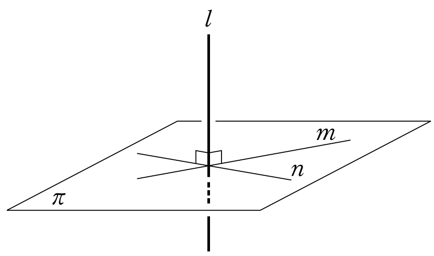
まず，$l \parallel m$ のときは，2直線のなす角を 0° と定める．l と m が平行でなく，かつ交わらないとき，l と m は**ねじれの位置**にあるという．

ねじれの位置にある2直線に関しては，図のようにいずれかの直線を平行移動して，交わるようにしてからなす角を考えればよい．

（注） 2直線のなす角 θ は通常 $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で考える．

2直線 l, m のなす角が 90° のとき，l と m は垂直であるといい，$l \perp m$ とかく．特に，垂直な2直線が交点をもつとき，2直線は直交するという．

B 直線と平面の垂直



平面 π 上のすべての直線と直線 l が垂直であるとき，直線 l と平面 π は垂直であるといい，$l \perp \pi$ とかく．

このとき，l と π は直交するといい，さらに，l は π の垂線であるという．

直線 l と平面 π が垂直になるためには，平面 π 上の交わる2直線 m, n について，$l \perp m$, かつ $l \perp n$ が成り立てばよい．

平面 π 上の交わる2直線がいずれも l と垂直であるとき，直線 l と平面 π は垂直である．

2 空間ベクトル

A 空間におけるベクトルの分解

空間の 4 点 O, A, B, C が四面体の 4 頂点となるとき，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であるという．

空間において，3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立であるとき，任意のベクトル $\vec{x}$ は，

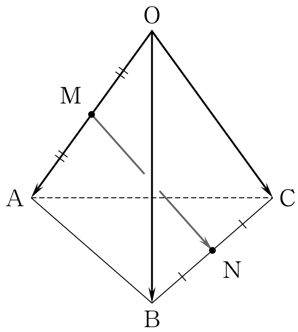
$$\boldsymbol{\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}} \quad (r,\ s,\ t \text{ は実数})$$

の形で表すことができる．しかも**その表し方はただ 1 通り**である．

例 1　四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC の中点を N とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と 1 次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すことができる．



問 1　四面体 OABC において，辺 AB を 1:2 に内分する点を D，辺 OC の中点を E としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

B 平面上の点の表し方

同一直線上にない 3 点 A, B, C を含む平面 ABC 上に点 P があるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と変形できる．さらに，$r=1-s-t$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (r,\ s,\ t \text{ は実数},\ r+s+t=1)$$

となる．以上をまとめると，

5・3 四面体 OABC があり，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1,\ \mathrm{OB}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

を満たしている．

(1) 平面 OAB に関して点 C と対称な点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) 線分 BC の中点を M とする．平面 OAB 上を点 P が動くとき，線分の長さの和 CP＋PM の最小値を求めよ．

5・4 1辺の長さが2である正四面体OABCがある．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ．

(2) 辺OA上に点Pを，辺BC上に点Qをとり，線分PQの中点をMとする．

点Pが辺OA上を，点Qが辺BC上をくまなく動くとき，点Mはある平面上を動く．点Mの動き得る範囲の面積を求めよ．