

第1講 確率

1 確率

ある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は同様に確からしいという。このような試行で、全事象を U 、ある事象を A とするとき、 $\frac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A の確率といい、 $P(A)$ で表す。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

このことから、 $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(U) = 1$ となる。

2 確率の基本性質

いろいろな事象に対して、次のような確率の性質を導ける。

事象 A, B に対して、

$$[1] \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

特に、 A, B が排反であるとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$[2] \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

例1 サイコロを1つ振るとき、奇数の目が出る事象を A 、3以下の目が出る事象を B とする。このとき、確率 $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ を求めよ。

解 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり、

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{1, 3\}$$

であるから、

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

また、

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}, \\
P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

問1 サイコロを1つ振るとき、3以下の目が出る事象を A 、3の倍数の目が出る事象を B とする。このとき、確率 $P(A \cap B)$ 、 $P(A \cup B)$ 、 $P(\overline{A})$ を求めよ。

3 反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返すとき、 A がちょうど k 回起こる確率は、

$${}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$$

正の数 a に対して $a^0 = 1$ と定めると、上の公式は $k=0$ 、 $k=n$ のときも成り立つ。

例2 1つのサイコロを3回振って、3の倍数の目がちょうど2回出る確率を求めよ。

解 サイコロを1回振ったとき、3の倍数の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ 、3の倍数以外の目が出る確率は $\frac{2}{3}$ である。1回目、2回目、3回目のうちで3の倍数の目が出る2回の選び方が ${}_3 C_2 = 3$ (通り) あり、それぞれの確率が $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ であるから、求める確率は

$$3 \cdot \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$

問2 1つのサイコロを3回振って、奇数の目がちょうど2回出る確率を求めよ。

練習

1・1 サイコロを何回か振って，出た目の数の和を考える．

- (1) 2回振るとき，出た目の数の和が7の倍数となる確率を求めよ．
- (2) 3回振るとき，出た目の数の和が7の倍数となる確率を求めよ．

予習		授業			復習
A	B	A	B	C	

1・2 人口100人につき1人の割合で患者が発生する疾患と，その疾患にかかっているかどうかを判定する検査薬がある．検査薬の精度は，以下の通りである．

	陽性となる確率	陰性となる確率
疾患にかかっている人	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$
疾患にかかっていない人	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

- (1) ある人が陽性と判定される確率を求めよ．
- (2) 陽性と判定された人が実際に疾患にかかっている確率を求めよ．

予習		授業			復習
A	B	A	B	C	

1・3 サイコロを6回振り, k 回目 ($1 \leq k \leq 6$) に出る目を X_k とする.

- (1) 積 $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ が, 3 の倍数だが 9 の倍数でない確率を求めよ.
- (2) 積 $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ が, 9 の倍数だが 27 の倍数でない確率を求めよ.

予 習		授 業			復習
A	B	A	B	C	