第３講　数　列

１．和と一般項の関係

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和，すなわち $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を S_n とすると，

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \quad \cdots ①$$

$n=1$ のとき，① より，

$$S_1 = a_1.$$

$n \geqq 2$ のとき，① より，

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}. \quad \cdots ②$$

① と ② の差をとると，

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \\ -) & S_{n-1} = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}. \\ \hline & S_n - S_{n-1} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_n. \end{array}$$

したがって，次の関係が成り立つ．

和と一般項の関係

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_n & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2). \end{cases}}$$

例題　3・1

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_n = 2^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ．

【解答】

$$a_1 = S_1 = 2.$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$ （これは $n=1$ のときは成り立たない．）

したがって，

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1), \\ 2^{n-1} & (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots). \end{cases} \quad \cdots(答)$$

2．漸化式

数列において，いくつかの項の間に成り立つ関係を示す等式を**漸化式**という．

以下において，漸化式の代表的なタイプについての解法をまとめておく．ただし，漸化式は $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において成り立つものとする．

〈1〉　$a_{n+1}=a_n+d$ 型 (d：定数)

数列 $\{a_n\}$ は，公差が d の等差数列であるから，

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

〈2〉　$a_{n+1}=ra_n$ 型 (r：定数．$r\neq 0$)

数列 $\{a_n\}$ は，公比が r の等比数列であるから，

$$a_n=a_1r^{n-1}.$$

〈3〉　$a_{n+1}=pa_n+q$ 型 ($p,\ q$：定数．$p\neq 0,\ 1$．$q\neq 0$)

$$a_{n+1}=pa_n+q. \qquad \cdots ①$$

等式

$$\alpha=p\alpha+q \qquad \cdots ②$$

を満たす α を用いると，①－② より，

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

となるので，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は公比が p の等比数列であるから，

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}.$$

したがって，

$$a_n=\alpha+(a_1-\alpha)p^{n-1} \quad \left(\text{ただし，}\alpha=\frac{q}{1-p}\right).$$

〈4〉　$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ 型 ($p,\ q,\ r$：定数．$p\neq 0,\ 1$．$q\neq 0$)

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+q(n+1)+r, \qquad \cdots ③$$

$$a_{n+1}=pa_n+qn+r. \qquad \cdots ④$$

③－④ より，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+q.$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=pb_n+q$$

となり〈3〉の型に帰着されるので，b_n すなわち $a_{n+1}-a_n$ が求められ，これと ④ より a_n が求められる．

演 習

3・1

数列 $\{a_n\}$ が次の式を満たしている．

$$\begin{cases} a_1=2, \\ a_{n+1}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \end{cases}$$

このとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

3・2

円周上に m 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_m がこの順に配置され，各点 P_i に 1 つの実数 c_i が与えられている $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$．ただし $m\geqq 3$ とする．さらに，$(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$ は条件

(＊)　各点の値は，隣接する 2 点の値の和に等しい

を満たす．

(1)　$m=3$ の場合に $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ の値を求めよ．

(2)　$c_1=a$，$c_2=b$ とおくとき，c_7 を a，b で表せ．ただし $m\geqq 7$ とする．

(3)　条件(＊)を満たし，かつ $c_1\neq 0$ となる $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$ が存在するのは m がどのような自然数の場合か．m が満たすべき必要十分条件を求めよ．