第1講

整数・有理数・実数・複素数

人々は自然数から始めて加減乗除の四則演算ができるように，数の体系を拡張して，整数・有理数を作ってきた．さらに連続的な変化や量を扱えるように実数という体系を考える．そこでは極限操作が新たな算法として登場してきた．

また，実数係数の n 次方程式の解をすべて取り込むことが可能な複素数という体系まで考えるようになった．

第1講では，それぞれの数の体系の仕組や性質をよく理解して，問題解決を図ることを目的とする．特に，整数を中心として有理数・無理数の問題にも対処できるように訓練する．

例題 1

整数 a，b と自然数 n に対して，$a-b$ が n で割り切れるとき，

「a と b は n を法（ほう）として合同である」

といい，$a \equiv b \pmod{n}$ と表す．（$a-b$ が n で割り切れないときは $a \not\equiv b \pmod{n}$ と表す．）

整数 a，b，c と自然数 n に対して，命題

$$(*)\ \text{「}ac \equiv bc \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{n}\text{」}$$

の真偽を調べよ．

$ac \equiv bc \pmod{n}$ であるとき，定義より，ある整数 k を用いて $ac-bc=nk$，つまり，

$$(a-b)c=nk \qquad \cdots ①$$

と表せる．このとき，$(a-b)c$ は n で割り切れるが，$a-b$ が n で割り切れるとは限らない．

【例題1の解答】

(*) は偽である．

（反例）　$n=6$，$c=4$，$a=8$，$b=5$．

このとき，$8\cdot4-5\cdot4=12=2\cdot6$ より $8\cdot4 \equiv 5\cdot4 \pmod{6}$，つまり $ac \equiv bc \pmod{n}$ であるが，$8-5=3$ より $8 \not\equiv 5 \pmod{6}$，つまり $a \not\equiv b \pmod{n}$ である．

【例題1の解答終り】

c と n が互いに素であるときは，(*) は成り立つ．なぜならば，このときは ① より $a-b$ が n で割り切れるからである．

また，c と n が互いに素ではなく，1より大きい最大公約数 g をもつ場合は，互いに素な整数 C，N を用いて $c=gC$，$n=gN$ と表せるから，① は $(a-b)C=Nk$ となる．C と N が互いに素である

ことから，$a-b$ は N で割り切れ，

$$a \equiv b \pmod{N},\ \text{つまり}\ a \equiv b \left(\mathrm{mod}\,\frac{n}{g}\right)$$

がいえる．

例題 2

有理数 a，b，c が $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$ を満たすならば $a=b=c=0$ であることを示せ．ただし，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは用いてよい．

【例題 2 の解答】

$$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0 \qquad \cdots ①$$

の両辺に $\sqrt[3]{2}$ をかけて整理すると，

$$b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2}+2a=0. \qquad \cdots ②$$

「①$\times b-$②$\times a$」より，

$$\left(b^2-ac\right)\sqrt[3]{2}+bc-2a^2=0. \qquad \cdots ③$$

ここで，$b^2-ac\neq 0$ と仮定すると，③ より，

$$\sqrt[3]{2}=\frac{2a^2-bc}{b^2-ac}\ (\text{有理数})$$

となり，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることに矛盾する．よって，

$$b^2-ac=0. \qquad \cdots ④$$

③，④ より，

$$bc-2a^2=0. \qquad \cdots ⑤$$

「④$\times b+$⑤$\times a$」より，

$$b^3-2a^3=0.$$

$a\neq 0$ と仮定すると，a，b は有理数より $\sqrt[3]{2}=\dfrac{b}{a}$（有理数）となり，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることに矛盾する．

よって，$a=0$ であり，④ より $b=0$．さらに ① より $c=0$．

【例題 2 の解答終り】