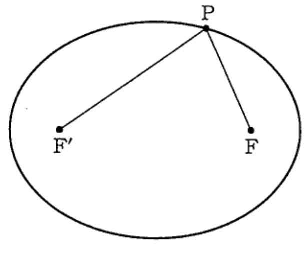
第5講　2次曲線

1　楕円の定義とその方程式

A　楕円の定義



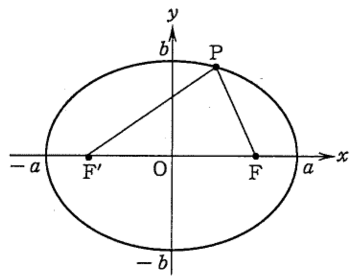
平面上で2定点F, F′に対して,

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=(一定)$$

を満たす点Pの軌跡を**楕円**という.

ここで, 2点F, F′をこの楕円の**焦点**, 線分FF′の中点を楕円の**中心**という.

B　楕円の方程式



xy平面上において,

$$\mathrm{F}(c,\ 0),\quad \mathrm{F'}(-c,\ 0)\quad (c>0)$$

とすると,

$$\mathbf{PF+PF'=2}\boldsymbol{a}\quad (\boldsymbol{a}>\boldsymbol{c})$$

を満たす点$\mathrm{P}(x,\ y)$の軌跡(楕円)の方程式は,

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)}\qquad \cdots(*)$$

ここで, $b=\sqrt{a^2-c^2}$である. したがって, $c=\sqrt{a^2-b^2}$であるから, 楕円(*)の

焦点の座標は　$\mathbf{F}\left(\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2},\ 0\right),\quad \mathbf{F'}\left(-\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2},\ 0\right)$

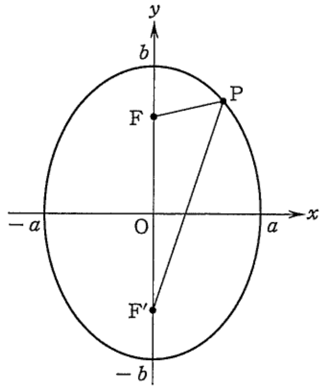
また, 方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (b>a>0)$$

は, 右の図のような楕円を表す. この楕円の焦点の座標は,

$$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right),\quad \mathrm{F'}\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$$

であり, 楕円上のすべての点Pに対して,



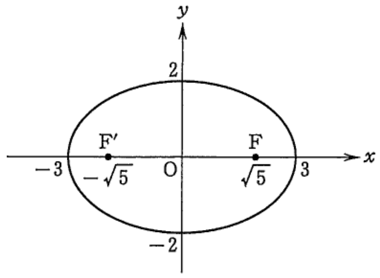
$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2b$$

が成り立つ．

例1　次の楕円について，焦点の座標を求めよ．また，その楕円の概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　　　(2) $x^2-4x+4y^2=0$

解 (1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ は，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の $a=3$，



$b=2$ の場合であるから，

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}.$$

よって，この楕円の焦点の座標は，

$$(\sqrt{5},\ 0),\quad (-\sqrt{5},\ 0)$$

であり，この楕円の概形は右の図のようになる．

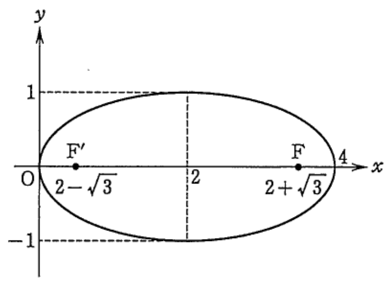
(2) 与えられた楕円を C_1 とすると，その方程式は，

$$(x-2)^2+4y^2=4\quad すなわち\quad \frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$$

と表せるから，C_1 は楕円 C_2: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸の正の向きに 2 だけ平行移動したものである．

一方，C_2 の方程式は，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の $a=2$，$b=1$ の場合であるから，

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$



よって，C_2 の焦点の座標は，

$$(\sqrt{3},\ 0),\quad (-\sqrt{3},\ 0)$$

である．

以上より，C_1 の焦点の座標は，

$$(2+\sqrt{3},\ 0),\quad (2-\sqrt{3},\ 0)$$

であり，この楕円の概形は右の図のようになる．

5・3 楕円 C_1: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の焦点をF, F′ とする．ただし，F の x 座標は正である．正の定数 m に対し，2直線 $y=mx$, $y=-mx$ を漸近線にもち，2点F, F′ を焦点とする双曲線を C_2 とする．また，第1象限にある C_1 と C_2 の交点をPとする．

(1) F, F′ の座標を求めよ．

(2) 線分FPおよび線分F′Pの長さを m を用いて表せ．

(3) $\angle \mathrm{FPF'}=\dfrac{\pi}{3}$ となるような m の値を求めよ．

5・4 xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の距離 OP と，P から直線 $x=-3$ へ下ろした垂線の長さ PH の比 $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ の値が一定値 $a(>0)$ であるという．

このとき，P の軌跡が楕円になるような a の値の範囲を求め，そのときの楕円の焦点の座標を求めよ．