第５講　積分法（数学Ⅲ）

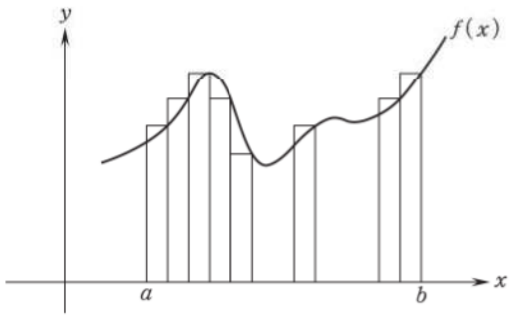
基本事項

◇ 積分の概念

❶ 区分求積法による定積分の定義

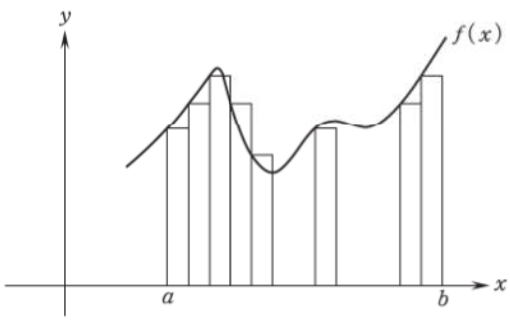
(1) 長方形の高さを右側を基準にしてとる方法

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x \quad \left(\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right).$$



(2) 長方形の高さを左側を基準にしてとる方法

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x \quad \left(\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right).$$



（注１） (1) も (2) も $\varDelta x \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) のとき，同じ値に収束する．

（注２） 区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x)\geqq 0$ なら定積分の値は，面積の値になる．つねに $f(x)\leqq 0$ なら $-$(面積の値) になり，$f(x)>0$ なる x と，$f(x)<0$ なる x が，区間 $[a,\ b]$ に両方とも存在するときは，($f(x)>0$ の部分の面積) $-$ ($f(x)<0$ の部分の面積) が定積分の値となる．

(3) 特に区間 $[0,\ 1]$ のとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x \quad \left(\varDelta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x.$$

例　題　5・1

区分求積による定義にもとづいて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

【解答】

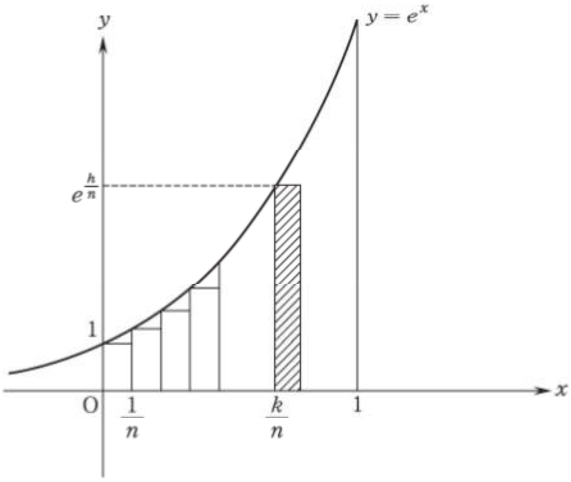
$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}.\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{n}=h$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき $h\longrightarrow 0$.

$$\therefore\quad \int_0^1 e^x\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}(e-1) = e-1.$$

(注)

$$\begin{aligned}\int_0^X e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{X}{n}k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}\cdot\frac{\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^n-1}{e^{\frac{X}{n}}-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}\cdot\frac{1}{e^{\frac{X}{n}}-1}\left(e^X-1\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}\left(e^X-1\right)\\ &= e^X-1.\end{aligned}$$



歴史的にみると，このようにして定積分が，微分とは独立して考えられた．しかし，高校数学では，微分の逆演算として積分が導入されている．面積を求める計算を通して，両者を考察しておくとよい．

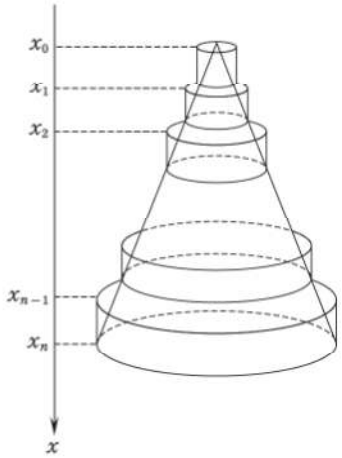
❹ 区分求積法による体積の求め方

立体の体積は，下図(1), (2)のように，軸に垂直な断面で区切った n 個の柱体に分けてから，それぞれの立体の体積の和を計算することで，近似できる．$n \longrightarrow \infty$ とすれば，求める立体の体積が得られる．

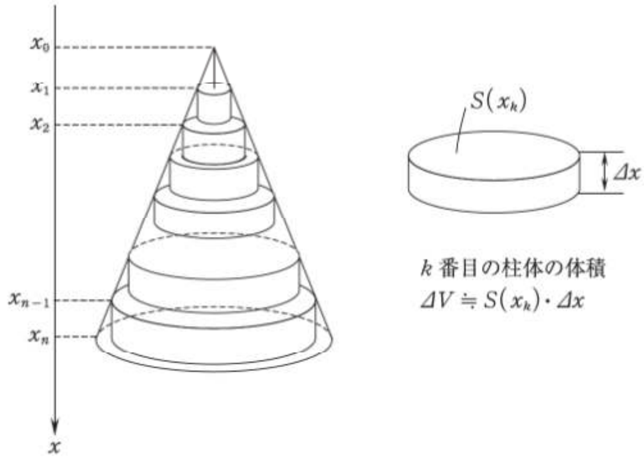
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\cdot\Delta x \quad [図(1)]\ ,$$

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}S(x_k)\cdot\Delta x \quad [図(2)]\ .$$

図(1)



図(2)



k 番目の柱体の体積
$\Delta V \fallingdotseq S(x_k)\cdot\Delta x$

演 習

5・1

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

5・2

$0<a<1$ のとき，$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin^2 x-a\right|dx$ の最小値を求めよ．