$$
\begin{aligned}
\cos 105^\circ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan 105^\circ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} \\
&= -2-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

## 4　2 倍角・3 倍角の公式

三角関数の加法定理を用いることにより，次の **2 倍角の公式**が得られる．

$$\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

また，2 倍角の公式と加法定理を用いることにより，次の **3 倍角の公式**が得られる．

$$\boldsymbol{\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

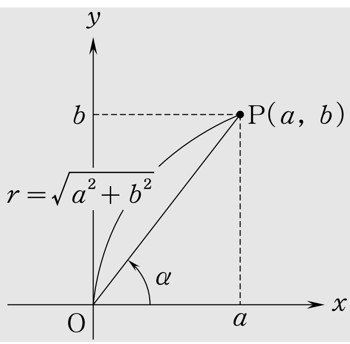
## 5　三角関数の合成

$a^2+b^2 \neq 0$ のとき，

$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

ただし，$\alpha$ は $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

を満たす角である．

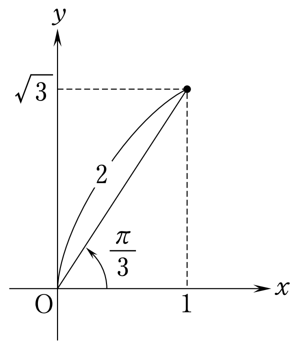


$a\sin\theta + b\cos\theta$ をこのように変形することを**三角関数の合成**という．

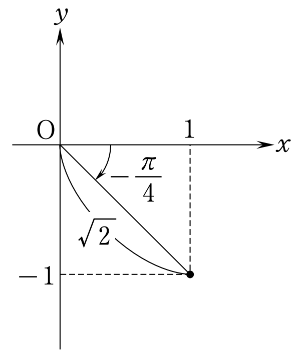
例 5　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする．

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

解　(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$




(2)　$\sin\theta-\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$




## 6　対称式と次数下げ

### A　$\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

であるから，

$$\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta = t}$$

とおくと，

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}}$$

　これらより，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式は，$t$ のみで表せることがわかる．

### B 2倍角の公式を用いた次数下げ

2倍角の公式を逆に用いることによって，$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ の次数を下げることができる．

1．$\boldsymbol{\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$

2．$\boldsymbol{\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$

3．$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta}$

## 7 和と積の公式

加法定理を用いて，次の公式が得られる．

### A 積を和になおす公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\},$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\},$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\},$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

**1・3**　$a$ は実数の定数とする．$x$, $y$ の連立方程式

$$\begin{cases} \cos x + 2\cos y = 1, \\ \sin x + 2\sin y = a \end{cases}$$

が，少なくとも 1 組の実数解をもつための $a$ のとり得る値の範囲を求めよ．