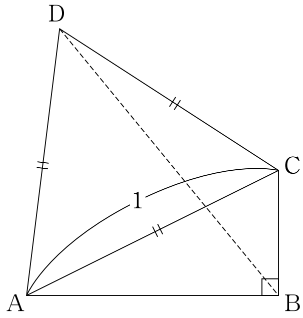
第5講　三角関数 (2)

例1　AC を斜辺とする直角三角形 ABC があり，AC＝1 である．図のように三角形 ACD が正三角形となるように，点 D を直線 AC に関して B と反対側にとる．条件を満たしながら三角形 ABC が動くとき，三角形 ABD の面積 S の最大値を求めよ．



解　$\angle\mathrm{CAB}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ より，

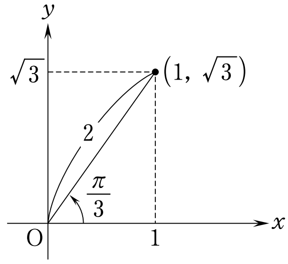
$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\cos\theta=\cos\theta.$$

$\angle\mathrm{DAC}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{DAB}\\&=\frac{1}{2}\cos\theta\cdot1\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta\right).\end{aligned}$$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{8}\left(\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta+\sqrt{3}\right)\\&=\frac{1}{8}\left\{2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right\}\\&=\frac{1}{4}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{3}<2\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4}{3}\pi$ であるから，$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，

すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ は最大値 1 をとる．

よって，このとき S も最大となり，S の最大値は

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

例1 のように，適当な角を θ とおくことにより，三角関数を用いて図形量の最大値や最小値を考えることができる．

問1 例1 において，線分 BD の長さの最大値を求めよ．

5・3 $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=1$, $\mathrm{CA}=2$ の直角三角形 ABC の内部に点 P があり，

$\angle\mathrm{BPC}=\dfrac{2}{3}\pi$ を満たして動く．また，$\angle\mathrm{PBC}=\theta$ とする．

(1) CP の長さを θ を用いて表せ．

(2) AP の長さの最小値を求めよ．

5・4 平面上で，鋭角三角形 OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を三角形 OBC，三角形 OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を三角形 OCD，三角形 OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を三角形 ODE とする．三角形 OAB と 三角形 OBE の面積比が $2:3$ のとき，$\sin\angle \mathrm{AOB}$ の値を求めよ．