第2講

仕組みの把握と計算

数学の問題には，方程式や関数，数列などで作られた様々な「仕組み」が隠されており，それを活かせば計算の見通しが格段に良くなることが多い．

この講では，そうした問題の中に潜む仕組みを深く理解し，解答作成においてより多くの選択肢からより効果的な手段を選択する力を鍛える．

例題

n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ．

【解答】

$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，命題 p_n を

p_n:「$\dfrac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots n$）ならば

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)」$$

とおく．

（Ⅰ） $\dfrac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2$）である 2 個の数 $a_1,\ a_2$ について，

$$\begin{aligned}(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}&=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)\\&>0.\end{aligned}$$

これより，$(1-a_1)(1-a_2)>1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}\right)$ であり，p_2 は成立する．

（Ⅱ） p_k の成立を仮定する．

このとき，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1$）である $k+1$ 個の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k+1}$ について，

$$(1-a_1)\underline{(1-a_2)\cdots(1-a_{k+1})}-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$>(1-a_1)\underline{\left\{1-\left(a_2+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\right\}}-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

（$1-a_1>0$ に注意し，k 個の数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{k+1}$ に対して p_k を用いた）

$$=1-a_1-(1-a_1)\left(a_2+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)-1+a_1+\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)$$

$$=\left(a_2+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\left(a_1-\frac{1}{2}\right)$$

$$>0.$$

これより，$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_{k+1}}{2^k}\right)$ であり，p_{k+1} も成立する．

(Ⅰ)，(Ⅱ) から，数学的帰納法により，$p_n(n=2, 3, 4, \cdots)$ の成立が示された．

【解答終り】

ここで，示すべき不等式の仕組みについて考えてみよう．

例えば $n=3$ の場合，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$ $(j=1, 2, 3)$ である 3 個の数 a_1, a_2, a_3 をとると，示すべき不等式は

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}\right) \cdots (*)$$

である．

(*) の左辺は (図 1) の斜線部分の立体の体積を表しており，これは，1 辺の長さが 1 の立方体全体から，(図 2)，(図 3)，(図 4) の 3 つの直方体を取り除いた立体の体積ともみなせる．

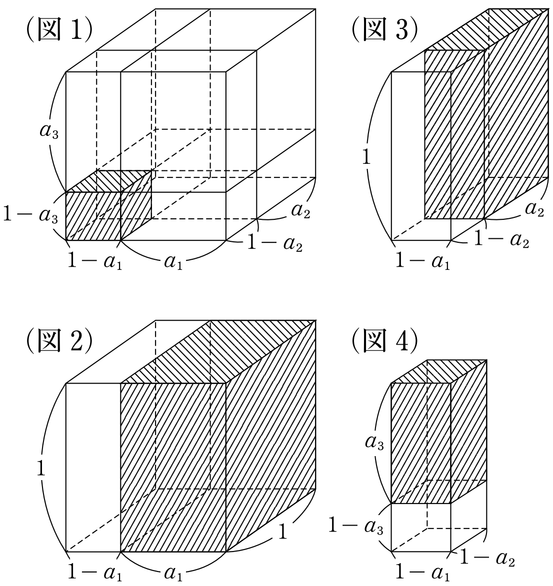
これより，(*) の左辺は

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=1-\{a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3\}$$

と変形できることがわかり，これと

$$(1-a_1)a_2<\frac{1}{2}a_2,\ (1-a_1)(1-a_2)a_3<\frac{1}{2^2}a_3$$

により，(*) の成立がわかる．



同様のことを一般の n で試みると，

$$\underline{1-a_1-(1-a_1)a_2}-(1-a_1)(1-a_2)a_3-\cdots-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n$$
$$=\underline{(1-a_1)(1-a_2)-(1-a_1)(1-a_2)a_3}-\cdots-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n$$
$$=\underline{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}-(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)a_4-\cdots-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n$$
$$=\ \cdots$$
$$=(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$$

より，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=1-\{a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\cdots+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n\}$$

と変形できることがわかり，これと

$$(1-a_1)a_2<\frac{1}{2}a_2,\ (1-a_1)(1-a_2)a_3<\frac{1}{2^2}a_3,\ \cdots,\ (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n<\frac{1}{2^{n-1}}a_n$$

により，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2^2}a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_n\right)$$

の成立が示される．