第3講 微分法・積分法

基本事項

◇ 微分係数と導関数

❶ 平均変化率

$a \neq b$ のとき，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率は，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

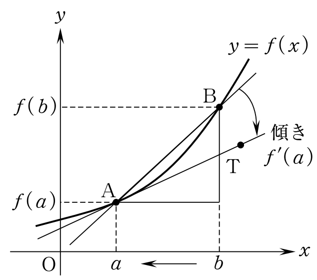
❷ 微分係数

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数は，

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

b を a に限りなく近づけたとき，平均変化率がある値に限りなく近づくならば，この値を**微分係数**といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ と表す．

このとき，b が a に近づけば直線 AB は接線 AT に近づくので，A における接線の傾きは $f'(a)$ である．



❸ 導関数

微分係数 $f'(a)$ は a の関数であるから，$f'(x)$ を考えることができる．

$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**といい，$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を**微分する**という．

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

❹ 微分法の公式

⑴ $\boldsymbol{(c)'=0}$.（$\boldsymbol{c}$ **は定数**）

⑵ $\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$.（$\boldsymbol{n}$ **は自然数**）

⑶ $\boldsymbol{\{kf(x)\}'=kf'(x)}$.（$\boldsymbol{k}$ **は定数**）

⑷ $\boldsymbol{\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)}$.（**複号同順**）

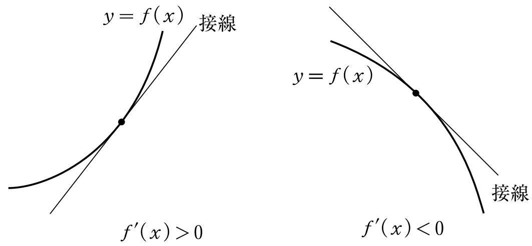
⑸ $\boldsymbol{\{(x+a)^n\}'=n(x+a)^{n-1}}$.（$\boldsymbol{a}$ **は定数，**$\boldsymbol{n}$ **は自然数**）

◇ 関数の増減と極値

❺ 増減

区間 I で

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ のとき } f(x) \text{ は増加,} \\ f'(x)<0 \text{ のとき } f(x) \text{ は減少,} \\ f'(x)=0 \text{ のとき } f(x) \text{ は一定.} \end{cases}$$



❻ 極値

関数 $f(x)$ が，$x=a$ を境として，増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という．また，$x=b$ を境として，減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x=b$ で**極小**であるといい，$f(b)$ を**極小値**という．

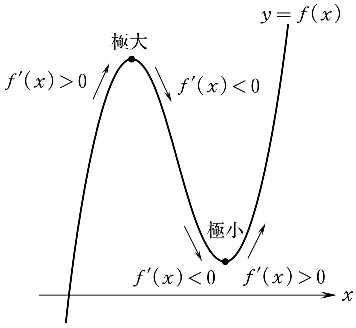
極大値と極小値を合わせて**極値**という．

❼ 極値と導関数

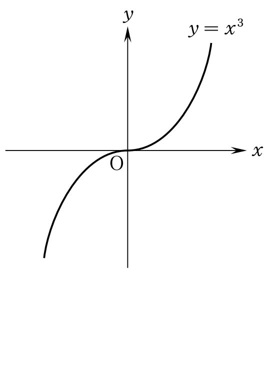
⑴ $f'(a)=0$ となる $x=a$ を境にして，

$$\begin{cases} f'(x) \text{ が正から負に変化するとき，} f(a) \text{ は極大値,} \\ f'(x) \text{ が負から正に変化するとき，} f(a) \text{ は極小値.} \end{cases}$$

⑵ $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとき $f'(a)=0$ であるが，逆は必ずしも成り立たない．



（注） たとえば $f(x)=x^3$ とすると，$f'(x)=3x^2$ であるから
$f'(0)=0$ となるが，$f(0)$ は極値ではない．



例題 3・1

(1) $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$ とする．

(i) $f'(x)$ を求めよ．

(ii) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 次の図形で囲まれる部分の面積を求めよ．

(i) 放物線 $y=x^2-2x+2$，直線 $x=3$，x 軸，y 軸．

(ii) 放物線 $y=4x^2+2x-1$，直線 $y=x$．

【解答】

(1)(i)

$$f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(2x^2\right)'-(3x)'+(1)'$$
$$=3x^2+4x-3. \quad \cdots(答)$$

☜ 基本事項 ❹

(ii)

$$f'(0)=3\cdot0^2+4\cdot0-3=-3.$$

よって，点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は，

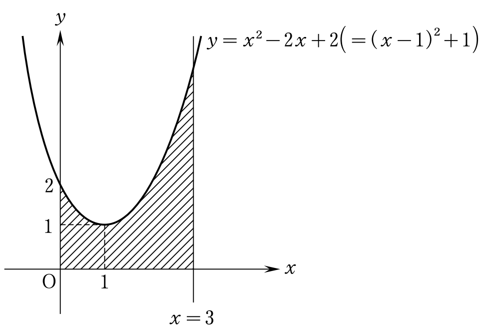
$$y-1=-3(x-0)$$

☜ 基本事項 ❽

すなわち，

$$y=-3x+1. \quad \cdots(答)$$

(2)(i)



求める面積は，

$$\int_0^3 (x^2-2x+2)\,dx$$

☜ 基本事項 ⓭

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^3$$
$$=(9-9+6)-0$$

☜ 基本事項 ⓫

$$=6. \quad \cdots(答)$$

演 習

3・1

(1) $f(x)=x^3+2x^2-4x+3$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1)で求めた接線を l とする．放物線 C：$y=3x^2-3x-8$ と l によって囲まれる部分の面積を求めよ．

関連する基本事項

(1) ❹，❽

(2) ❿，⓫，⓮，⓯

復習問題

3・1

⑴　$f(x)=-x^3-4x^2+6x-5$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ．

⑵　2 つの放物線 C_1: $y=-2x^2+1$ と C_2: $y=x^2+x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

1回目	2回目	3回目

3・2

$f(x)=-x^3+3x$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

⑴　C の概形をかけ．

⑵　C と x 軸によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を求めよ．

1回目	2回目	3回目