第３講　平面ベクトル(1)

基本事項

◇　ベクトルとその演算

❶　ベクトルの定義

(1)　線分 AB に A から B へ向かう向きを与えたものを有向線分 AB という．有向線分 AB において，A を始点，B を終点という．

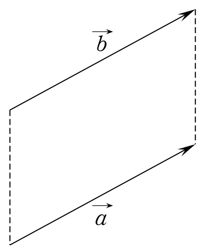
有向線分で，その位置を問題にせず，向きと長さだけを考えたものを**ベクトル**という．

有向線分 AB の表すベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と書く．

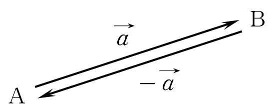
有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**といい，$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ と表す．

ベクトルは $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ などと表されることもある．

(2)　２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ について，それらを表す有向線分の向きと長さが一致するとき，これらのベクトルは等しいといい，$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}=\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ と表す．



(3)　ベクトル $\overrightarrow{a}$ と大きさが等しく，向きが反対であるベクトルを $\overrightarrow{a}$ の**逆ベクトル**といい $-\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ で表す．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると，$-\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathbf{BA}}=-\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ である．



また，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は大きさが 0 のベクトルと考え，これを**零ベクトル**といい $\overrightarrow{0}$ で表す．

$\overrightarrow{0}$ の向きは考えない．

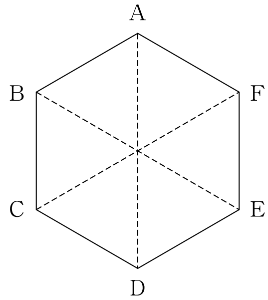
例題 1

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$



考え方

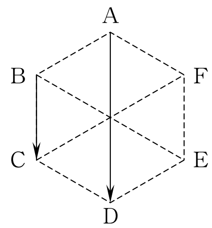
ベクトルの和，差（たし算，引き算）を用いて考えてみよう．

【解答】

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}. \qquad \cdots(答)$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\vec{b}$$

☜

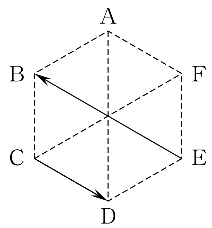


であるから，これと (1) の結果より，
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=2\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=-\vec{a}+\vec{b}. \qquad \cdots(答)$$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{a}$$

であるから，
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}$$
$$=2\vec{b}+(-\vec{a})$$
$$=-\vec{a}+2\vec{b}.$$

よって，
$$\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=\vec{a}-(-\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=2\vec{a}-2\vec{b}. \qquad \cdots(答)$$



☜
$$\overrightarrow{\mathrm{EB}}=-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$=-2(-\vec{a}+\vec{b})$$
$$=2\vec{a}-2\vec{b}$$
のように考えることもできる．

演 習

3・1

三角形 OAB があり，重心を G とする．さらに辺 AB を 2：1 に外分する点を P，線分 AG を 2：1 に内分する点を Q とする．

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

⑵ 辺 OB を 6：1 に内分する点を R とするとき，3 点 P，R，Q が一直線上にあることを示せ．また，PR：RQ を求めよ．

3・2

平行四辺形 OABC の辺 OA を 1：3 に内分する点を D，辺 OC の中点を E とし，線分 AE と線分 BD の交点を P とする．

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

⑶ 直線 OP と辺 AB との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．