# 第３講　確　　率 (1)

## 基本事項

### ◇ 確率の定義

❶ サイコロを振ったり，硬貨を投げたりするというように，同じ状態の下で繰り返すことのできる実験や観測を**試行**といい，試行の結果として起こる事柄を**事象**という．

❷ ある１つの試行で起こり得る結果に対して，どの結果も同じ程度に起こることが期待できるとき，それらの結果は**同様に確からしい**という．

例　A 君と B 君がそれぞれ袋をもっていて，どちらの袋にも番号 1，2，3 と書かれたボールが１つずつ入っている．２人が自分の袋の中からボールを１つずつ取り出すという試行において，起こり得るすべての結果は以下の９通りである．ただし A 君の取り出したボールの番号を $x$，B 君の取り出したボールの番号を $y$ とするとき，それを $(x,\ y)$ と表してある．

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$$
$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$$
$$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)$$

これら９通りは同様に確からしい．

❸ ある試行の結果として起こり得るすべての場合が $N$ $(\geqq 1)$ 通りあって，それらは同様に確からしいものとする．この $N$ 通りのうち事象 $A$ が起こる場合の数が $n$ 通りであるとき，**事象 $A$ の起こる確率**（$P(A)$ と表すことが多い）を

$$\boldsymbol{\frac{n}{N}}$$

で定める．

すなわち，

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{[\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}]}{[\text{起こり得るすべての場合の数}]}}$$

である．

例　❷の例において，「A 君の取り出した番号のほうが B 君の取り出した番号より大きい」という事象を $E$ とする．事象 $E$ の起こる場合の数は３通り．よって，事象 $E$ の起こる確率は $P(E)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$．

❹ $P(A)$ の定義からすぐわかるように

$$\boldsymbol{0 \leqq P(A) \leqq 1.}\ \left(0 \leqq n \leqq N \text{ から } 0 \leqq \frac{n}{N} \leqq 1.\right)$$

とくに，

$\boldsymbol{P(A)=0} \iff n=0 \iff$ **事象 $\boldsymbol{A}$ が決して起こらない**．（このとき，$A$ を空事象という．）

$\boldsymbol{P(A)=1} \iff n=N \iff$ **事象 $\boldsymbol{A}$ が必ず起こる**．（このとき，$A$ を全事象という．）

## ◇ 確率の加法定理

❺ 2 つの事象 $A$，$B$ に対して，「$A$ または $B$ の少なくとも一方が起こる」という事象を $A$ と $B$ の**和事象**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す．

また，「$A$ と $B$ がともに起こる」という事象を $A$ と $B$ の**積事象**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す．

そして，2 つの事象 $A$ と $B$ がともに起こることが決してないとき（すなわち $A \cap B = \varnothing$ のとき），「$A$ と $B$ は**互いに排反**である」，または「$A$ と $B$ は**排反事象**である」という．

$\boxed{\text{例}}$ ❷の $\boxed{\text{例}}$ の試行において，取り出した番号が大きい方を勝ちとする．

$A$ を「A 君が勝つ」という事象，$B$ を「B 君が勝つ」という事象

とすれば，

$A \cup B$ は，「A または B の少なくとも一方が勝つ」，すなわち「引き分けでない」という事象を表す．また，$A \cap B = \varnothing$ であるので，$A$ と $B$ は排反事象である．

❻ 2 つの事象 $A$，$B$ に対して，

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),}$$

とくに，**$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が排反のとき**，

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

が成り立つ．これを確率の加法定理という．

❼ ある試行において 1 つの事象 $A$ を考えるとき，「$A$ が起こらない」というのも 1 つの事象である．そこで，これを $A$ の**余事象**といい $\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．

このとき

$$\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{例}}$ ❷ の$\boxed{\text{例}}$において，❸ の$\boxed{\text{例}}$で用いた事象 $E$ の余事象 $\overline{E}$ は「A 君の取り出した番号が B 君の取り出した番号より小さいか，または等しい」という事象であり，確率は，

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

## 演 習

### 3・1

(1)　2つのサイコロを同時に振るとき，目の和が4以下になる確率を求めよ．

(2)　つぼの中に黒球2つ，白球2つが入っている．この中から無作為に2つの球を取り出すとき，黒球と白球が1つずつ取り出される確率を求めよ．

## 演 習

**3・4**

1つのサイコロを $n$ 回振り，$n$ 回の目のうち最大の数を $X$，最小の数を $Y$ とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，サイコロを1回振ったとき，1から6までの各目の出る確率はいずれも $\dfrac{1}{6}$ とする．

(1) $X \leqq 4$ かつ，$Y \geqq 2$ になる確率を $n$ を用いて表せ．

(2) $X = 4$ かつ，$Y \geqq 2$ になる確率を $n$ を用いて表せ．

(3) $X = 4$ かつ，$Y = 2$ になる確率を $n$ を用いて表せ．