合格への三歩目

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta = 0$$

を満たす θ の値を求めよ．

解答へのアプローチ

まずは，２倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

はよく使うのでしっかり覚えておきたい．ちなみに，この問題では使う機会がないが，

$$\cos 2\theta = \begin{cases} 2\cos^2\theta - 1 \\ 1 - 2\sin^2\theta \end{cases}$$

も覚えておかなくてはいけない重要公式である．

さて，与えられた方程式に２倍角の公式：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いれば

$$2\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta = 0$$

となり，$\cos\theta$ を共通因数としてくくれるので，

$$\cos\theta(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$$

となる．このことから，求める θ は

$$\cos\theta = 0 \quad \text{または} \quad \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$$

を満たす θ である．ここで，$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$ は，左辺が

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

と合成できることを利用する．

解答

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta = 0 \quad \cdots ①$$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ であるから，① より，

$$2\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$$

◀ ２倍角の公式
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

と変形できて，これより，

$$\cos\theta = 0 \quad \cdots ②$$

または

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2} \quad \cdots ③$$

が得られる．

② より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$．

③ より，

$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$ であるから，

$$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$\theta=\frac{7}{12}\pi.$$

よって，求める θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{12}\pi.$$

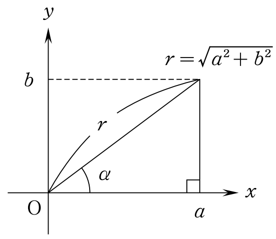
◀ a，b が $a^2+b^2 \neq 0$ である実数のとき，

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=r\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$,

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



演習

1・3

座標平面の x 軸の正の部分にある点 A と y 軸の正の部分にある点 B を考える．原点 O から点 A，B を通る直線 l に下ろした垂線と，直線 l との交点を P とする．OP＝1 であるように点 A，B が動くとき，次の問に答えよ．

⑴ $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ とするとき，3つの線分 OA，OB，AB の長さをそれぞれ θ を用いて表せ．

⑵ OA＋OB－AB の最小値を求めよ．

1・4

k を正の数とする．関数

$$f(x)=3\sin^2 x+2\sqrt{k}\sin x\cos x+\cos^2 x-k \quad (0\leqq x\leqq \pi)$$

について，

⑴ $f(x)$ を $\sin 2x$，$\cos 2x$ を用いて表せ．

⑵ $0\leqq x\leqq \pi$ を満たすすべての実数 x に対して，つねに $f(x)\geqq 0$ が成り立つような最大の k の値を求めよ．