第5講 積分法の応用(2)

演習

5・1 (1) 不定積分 $\int te^t\,dt$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して，$f(a)=\int_0^1 t\left|e^t-a\right|dt$ とおく．a が区間 $1<a<e$ において変化するとき，$f(a)$ の最小値を求めよ．

5・2 (1) $x>0$ のとき，不等式 $\log\dfrac{e^{2x}+1}{2}<x+\dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \log\frac{e^{2\sin x}+1}{2}\,dx<2+\frac{\pi}{4}$ を示せ．

6 関数の増減，極大・極小

A 関数の増減

関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能のとき，

$a < x < b$ でつねに $\boldsymbol{f'(x)>0}$ ならば $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で単調に**増加**する，すなわち，

$$\boldsymbol{x_1 < x_2} \text{ ならば } \boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$$

$a < x < b$ でつねに $\boldsymbol{f'(x)<0}$ ならば $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で単調に**減少**する，すなわち，

$$\boldsymbol{x_1 < x_2} \text{ ならば } \boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$$

B 関数の極大・極小

関数 $f(x)$ は連続とする．$x=a$ の前後において $f(x)$ が，

増加から減少に変わるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極大**，

減少から増加に変わるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極小**

という．

$f(x)$ が微分可能で，$f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で変わるとき，$f(x)$ は $x=a$ で極値をもつ．

例5　関数 $y=xe^{-x}$ の増減を調べて，グラフの概形をかけ．

解

$$y' = 1\cdot e^{-x} + x\cdot\left(-e^{-x}\right) = -(x-1)e^{-x}$$

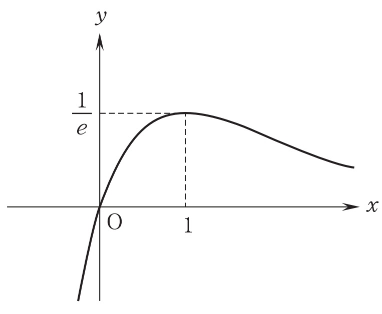
より，y の増減は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

また，

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$



以上より，$y=xe^{-x}$ のグラフは図のようになる．

(注)　n が正の整数のとき，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$$