例題 4・4

2^{n-1} $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を 10 進法で書いた数列

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \cdots \quad (*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) k を任意の正の整数とする．このとき，(*) の中には k 桁の数が必ず存在することを示せ．また，そのうち最小の数の最高位の数字は 1 であることを示せ．

(2) (*) のはじめの n 項のうち，最高位の数字が 1 である項の個数を $A(n)$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$ の値を求めよ．

【解答】

(1) (*) の中に，桁数が k でかつ最高位の数字が 1 のものが含まれていることを示す．それは，

$$10^{k-1} \leqq 2^{n-1} < 2\times 10^{k-1}$$

を満たす n が存在することと同値である．

$$k-1 \leqq (n-1)\log_{10}2 < \log_{10}2 + k - 1.$$

$$\frac{k-1}{\log_{10}2}+1 \leqq n < \frac{k-1}{\log_{10}2}+2.$$

これは，幅 1 の半開区間なので，必ずちょうど 1 つの整数 n が存在している．よって，示せた．

(2) (1) より，各桁に最高位の数が 1 のものがちょうど 1 つ存在し，かつそれはその桁の先頭に現れることがわかる．よって，

$$A(n) = (2^{n-1} \text{ の桁数})$$

である．

$$10^{A(n)-1} \leqq 2^{n-1} < 10^{A(n)}$$

これを $A(n)$ について解くと，

$$A(n)-1 \leqq (n-1)\log_{10}2 < A(n)$$

$$(n-1)\log_{10}2 < A(n) \leqq 1+(n-1)\log_{10}2$$

この各辺を n で割って，

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\log_{10}2<\frac{A(n)}{n}\leqq\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log_{10}2.$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，左辺，右辺はともに $\log_{10}2$ に収束するので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\log_{10}2.$$

付録② 数列と極限の基本事項

1 数　列

A 等差数列

❶ 等差数列の一般項

ある数（**初項**）に次々と一定の数（**公差**）を加えて得られる数列を**等差数列**という．したがって，初項を a，公差を d とおくと，第 n 項（**一般項**）は，

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

❷ 等差数列の和

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n = a + (a+d) + \cdots + \{a + (n-2)d\} + \{a + (n-1)d\}.$$

この数列を逆から並べて，

$$S_n = \{a + (n-1)d\} + \{a + (n-2)d\} + \cdots + (a+d) + a.$$

2 式を辺々加えると，

$$2S_n = n\{2a + (n-1)d\} = n(a_1 + a_n).$$

したがって，

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

B 等比数列

❶ 等比数列の一般項

ある数（**初項**）に次々と一定の数（**公比**）を掛けて得られる数列を**等比数列**という．したがって，初項を a，公比を r とおくと，第 n 項（**一般項**）は，

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

❷ 等比数列の和

等比数列の和の公式は重要であり，また，その証明に用いられる手法も有用なので，各自以下の証明を確かめること．

等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$
$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

2 式を辺々引くと，

$$(1-r)S_n = a(1-r^n).$$

したがって，

$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1), \\ na & (r = 1) \end{cases}}$$

C 数列の和

❶ 和の記号 $\sum$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を記号 $\sum$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} a_k$ で表す．つまり，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

和について以下の式が成り立つ．

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k} \qquad \text{(ii)} \quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

(ii) 式で α は，1 から n まで変化する数 k に無関係であれば，いつでも $\sum$ の外に出せることに注意しよう．したがって，たとえば α は n (k に無関係) の式であってもよい．

また，$k=1$，2，…，n について，つねに a_k が定数 c のときは，

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc.$$

❷ 和の公式

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)} \quad \text{(ii)} \quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \quad \text{(iii)} \quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$$

(i) は初項が 1，公差が 1 の等差数列の第 n 項までの和であるから等差数列の和の公式から得られる．そこで，(i) を用いて (ii) を証明する．

((ii) の証明)　恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ において