

$$\cos 105^\circ = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4},$$

$$\tan 105^\circ = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$$

$$= -2 - \sqrt{3}$$

4 2倍角・3倍角の公式

三角関数の加法定理を用いることにより、次の2倍角の公式が得られる。

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

また、2倍角の公式と加法定理を用いることにより、次の3倍角の公式が得られる。

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

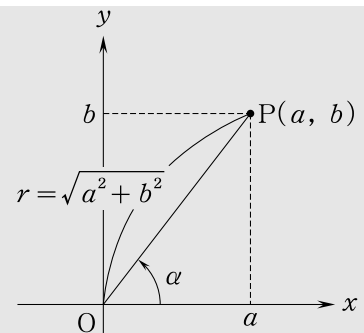
5 三角関数の合成

$a^2 + b^2 \neq 0$ のとき、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし、 α は $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

を満たす角である。



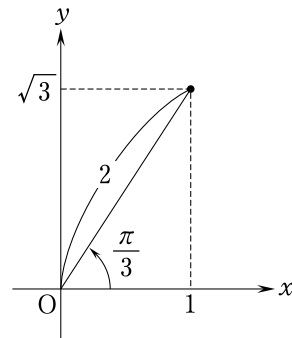
$a \sin \theta + b \cos \theta$ をこのように変形することを三角関数の合成という。

例 5 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

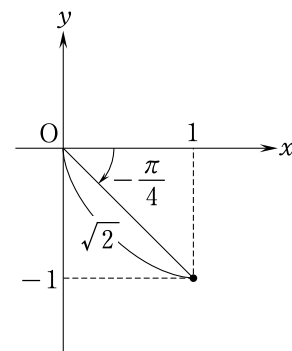
(1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

解 (1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$



(2) $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$



6 対称式と次数下げ

A $\sin \theta, \cos \theta$ の対称式

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

であるから、

$$\sin \theta + \cos \theta = t$$

とおくと、

$$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

すなわち、

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

これらより、 $\sin \theta, \cos \theta$ の対称式は、 t のみで表せることがわかる。

B 2倍角の公式を用いた次数下げ

2倍角の公式を逆に用いることによって、 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ の次数を下げるることができる。

$$1. \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$2. \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$3. \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

7 和と積の公式

加法定理を用いて、次の公式が得られる。

A 積を和になおす公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\},$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\},$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

1・3 a は実数の定数とする. x, y の連立方程式

$$\begin{cases} \cos x + 2 \cos y = 1, \\ \sin x + 2 \sin y = a \end{cases}$$

が, 少なくとも 1 組の実数解をもつための a のとり得る値の範囲を求めよ.



発展 1

θ が,

$$\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{4}{3}$$

を満たすとき、次の問に答えよ。ただし、 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ とする。

- (1) $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) θ と 25° の大小を比較せよ。

