第2講　2 次関数のグラフと最大・最小

2 次関数のグラフをもとにして，最大値や最小値を求めることを確認しよう．その応用として，変数の変換により 2 次関数に帰着させるものや，図計量の最大を考える問題などにチャレンジしよう．

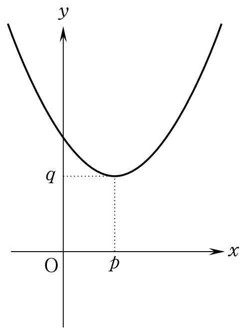
1　2 次関数のグラフ

y が x の 2 次式で表される

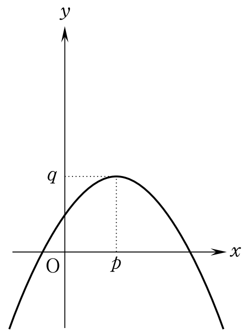
$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

のような関数を **2 次関数**という．

2 次関数のグラフは放物線とよばれる左右対称な曲線である．対称軸を放物線の**軸**といい，放物線とその軸の交点を放物線の**頂点**という．



$a>0$ のとき



$a<0$ のとき

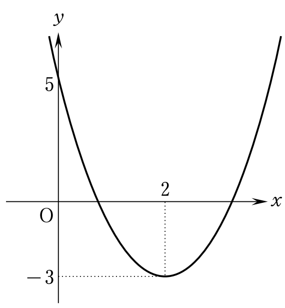
中学校で学んだ $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ のグラフは，y 軸を軸とし，原点を頂点とする放物線であり，$a>0$ のとき**下に凸**，$a<0$ のとき**上に凸**である．この放物線を，頂点が $(p,\ q)$ となるように平行移動すると，2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフとなる．

> $\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$ のグラフは，
>
> $a>0$ のとき下に凸の放物線，　$a<0$ のとき上に凸の放物線
>
> であり，
>
> **軸は $\boldsymbol{x=p}$，　頂点は $\boldsymbol{(p,\ q)}$**

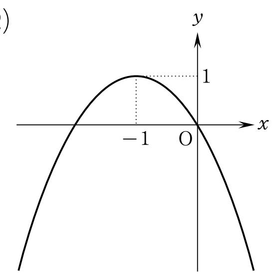
例 1　次の 2 次関数のグラフをかけ．

(1)　$y=2(x-2)^2-3$　　　(2)　$y=-(x+1)^2+1$

解　(1)



(2)



2　2次関数の最大値・最小値

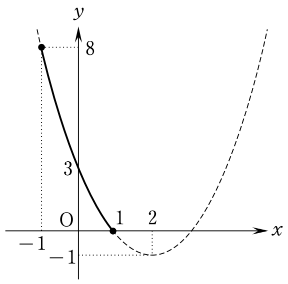
2次関数の最大値，最小値を求めるには，定義域と軸の位置の関係に注意し，定義域の端での y の値，頂点の y 座標などを調べる．

例3　以下のそれぞれの定義域における関数 $y=x^2-4x+3$ の最大値，最小値を求めよ．

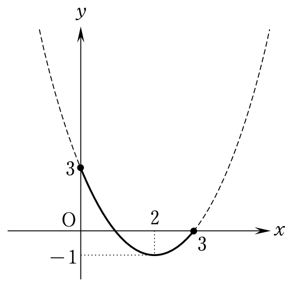
(1)　$-1 \leqq x \leqq 1$　　(2)　$0 \leqq x \leqq 3$　　(3)　$3 \leqq x \leqq 4$

解　与えられた関数は $y=(x-2)^2-1$ と変形できるから，グラフの軸は $x=2$，頂点は $(2,\ -1)$ である．このことに注意して，それぞれの定義域に対するグラフをかくと，次のようになる．

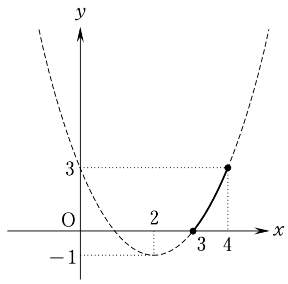
(1)　定義域が $-1 \leqq x \leqq 1$　(2)　定義域が $0 \leqq x \leqq 3$　(3)　定義域が $3 \leqq x \leqq 4$



最大値 8，最小値 0．



最大値 3，最小値 −1．



最大値 3，最小値 0．

問3　関数 $y=-2x^2+4x+4$ の最大値，最小値を，以下のそれぞれの場合について求めよ．

(1)　定義域が $-1 \leqq x \leqq 0$　(2)　定義域が $0 \leqq x \leqq 3$　(3)　定義域が $2 \leqq x \leqq 4$

2・3 a を 0 以上の定数とする．O を原点とする座標平面上に，点 A(12, 0) と直線 l: $y=x+2a$ がある．

点 P は O を，点 Q は A を同時に出発し，P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで，Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで動くものとする．また，P を通り x 軸に垂直な直線と l の交点を R とする． Q が O に達するまで動くとき，三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．