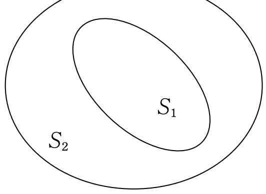
第 1 講

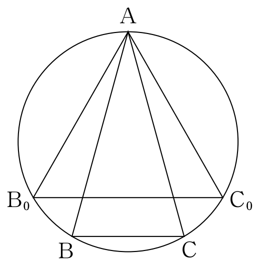
基本的な量による表現

この講では，図形問題における様々な情報をできるだけ基本的な量で定式化することを考える．直観的には把握できているような図形の情報も，問題の解決を目指すときには，それを「長さ」，「角」，「比」，「座標」，「ベクトル」等，何らかの量を用いて表現することが求められる．

例題

半径 r の円に内接する二等辺三角形の面積の最大値を求めよ．





上左図の 2 つの楕円の面積についてほとんどの人は $S_1 \leqq S_2$ は自明と述べるであろう．なぜなら一方の楕円はもう一方の楕円に含まれているから．ところが，上右図の正三角形 AB_0C_0 と二等辺三角形 ABC の場合は $\triangle AB_0C_0 \geqq \triangle ABC$ が上左図の場合と同じ方法で説明（証明）できるであろうか．三角形 ABC を円内でどんなに回転しても三角形 AB_0C_0 に含ませることはできない．

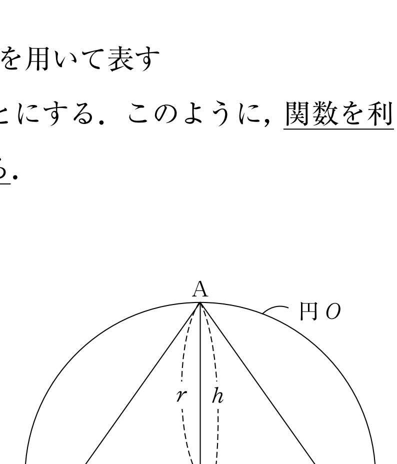
このように図形の形，大きさを保っての移動（合同変換）だけでは限界があり，面積を直接比較するのは難しい．そこで，

面積を辺の長さや角度という**基本的な要素**の**関数**を用いて表す

ことを考え，その関数の値の変化を調べて問題の最大値を求めることにする．このように，関数を利用すれば図形同士を直接比較できなくても問題に答えることができる．

では**例題**の解答の粗筋を説明しよう．半径 r の円 O の中心を O とし，辺 BC の中点を M とする．円 O に内接する二等辺三角形 ABC を考え，AB＝AC とする（右図）．高さ $h=\mathrm{AM}$ と底辺の長さ $2a=\mathrm{BC}$ という基本的な量を用いて面積 S を求めると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h=ah.$$



ここで三角形 MOC において三平方の定理

$$|h-r|^2+a^2=r^2 \qquad \cdots ①$$

が成立している．展開して整理すると $a^2=2rh-h^2$ となり，

$$S=h\sqrt{2rh-h^2}\ \ (0<h<2r).$$

このあとは $\dfrac{dS}{dh}$ を求めたり，もしくは 4 次関数 $f(h)=S^2$ を微分するなどして，関数の増減に帰着すればよい (結果は，正三角形のとき最大になり，S の最大値は $\max S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ となる)．

いま S を h で表したが，S を a で表すと ① から $h=r\pm\sqrt{r^2-a^2}$ を得るので

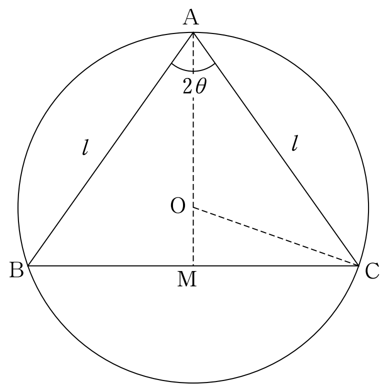
$$S=a(r\pm\sqrt{r^2-a^2})\ \ (0<a\leqq r)$$

の a に関する増減を調べればよい．もちろん最大を問題にする分には $S=a(r+\sqrt{r^2-a^2})$ だけを調べればよいのであるが，最初の解答よりも計算が少し面倒である．

このように複数の基本要素の量がある場合，それらのうちどれをどのように使うかは後の計算の難易や量にも影響する場合が多い．また，① のように，複数の基本要素の量の間に従属関係があるかないかということも掴んでおかなければならない．

その辺りをあいまいに進めた誤答例を挙げよう．等辺の長さ $l=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，頂角 $2\theta=\angle\mathrm{BAC}$ を利用して

$$S=\frac{1}{2}l^2\sin 2\theta\leqq\frac{1}{2}l^2. \qquad \cdots ②$$



ここで l は円の弦の長さだからその最大は直径の $2r$ であり，「S の最大値は $\frac{1}{2}(2r)^2=2r^2$ である」と結論づけるのは誤りである．$l=2r$ のとき $\theta=0$ となり三角形 ABC が成立しないので明らかに変だと気づくべきである．

また，次のような誤答例もある．② の等号が成立するのは $\sin 2\theta=1$，つまり $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときだから，そのときの l を $l=\sqrt{2}\,r$ と計算して「$\max S=r^2$ である」と．何らかの不等式を利用して (例えば相加平均，相乗平均についての不等式)，最大・最小の問題を解決したことがあるのであろう．その方法の形だけを真似て，上のような失敗をしてしまったようである．

変化する量 f の最大を求める問題に対し，不等式 $f\leqq g$ を発見したとしよう (右の f，g のグラフを参照)．g の最大は図の点 C が与えるが，それが f の最大を与える点 A ではない．また，$f\leqq g$ における等号は点 B で与えられるが，それも A ではない．上のような方法がうまくいくのは 3 点 A，B，C が重なっている場合である．よく使われるのが，g が定数であり，かつ等号が成立する場合である．