第3講 微分法の応用

例題 3・1

x, y が $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲を動くとき, $f(x,\ y)=3x^2-4xy-2x+3y+1$ の最大値と最小値を求めよ.

【解答】

【解 1】 $$F=f(x,\ y)=(3-4x)y+3x^2-2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$$

とおく.

〈Ⅰ〉 まず, x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で固定して F を y の関数とみて, その値域を調べる.

$$F(y)=(3-4x)y+3x^2-2x+1\ (0 \leqq y \leqq 1)$$

とおくと, $F(y)$ は y の1次関数 (または定数) である.

(i) $3-4x \geqq 0$ すなわち $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき,

$$F(0) \leqq F(y) \leqq F(1).$$

よって,

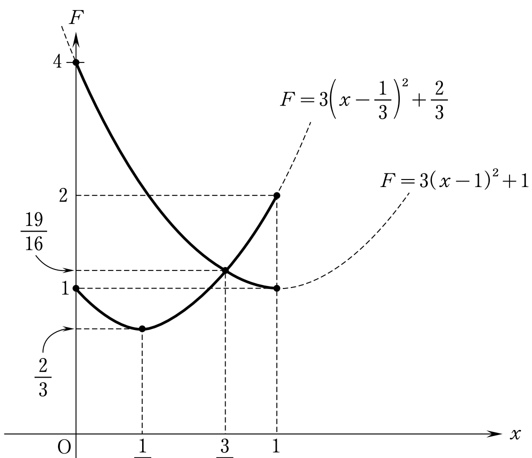
$$3x^2-2x+1 \leqq F \leqq 3x^2-6x+4.$$

(ii) $3-4x<0$ すなわち $\dfrac{3}{4}<x \leqq 1$ のとき,

$$F(1) \leqq F(y) \leqq F(0).$$

よって,

$$3x^2-6x+4 \leqq F \leqq 3x^2-2x+1.$$



〈Ⅱ〉 次に x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で動かして考えると，F は

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\ 0\right) \text{のとき，最小値 } \frac{2}{3},$$

$$(x,\ y)=(0,\ 1) \text{ のとき，最大値 } 4 \qquad \cdots(\text{答})$$

をとる．

【解 2】

〈Ⅰ〉 まず，y を $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲で固定して F を x の関数とみて，その値域を調べる．

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x^2-2(2y+1)x+3y+1 \\ &= 3\left(x-\frac{2y+1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}y^2+\frac{5}{3}y+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

とおくと，$F(x)$ は x の 2 次関数である．

$0 \leqq y \leqq 1$ より $\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{2y+1}{3} \leqq 1$ であるから，

$$F\left(\frac{2y+1}{3}\right) \leqq F(x) \leqq \max\{F(0),\ F(1)\}.$$

よって，

$$-\frac{4}{3}y^2+\frac{5}{3}y+\frac{2}{3} \leqq F \leqq \max\{3y+1,\ 2-y\}.$$

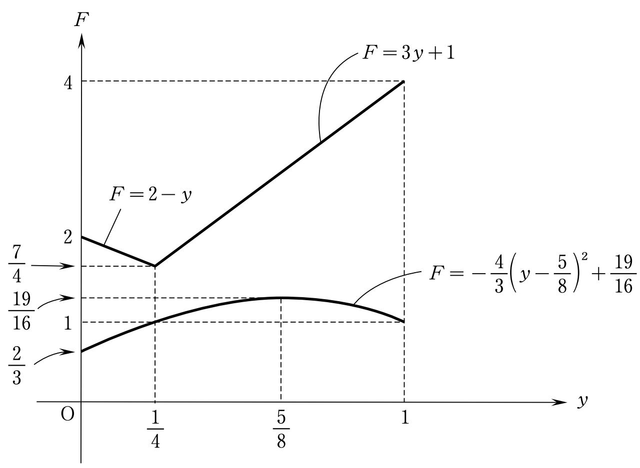
（ただし，a，b が実数のとき $\max\{a,\ b\}$ は a，b のうち小さくない方を表す）

〈Ⅱ〉 次に，y を $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲で動かして考えると，F は

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\ 0\right) \text{のとき，最小値 } \frac{2}{3},$$

$$(x,\ y)=(0,\ 1) \text{ のとき，最大値 } 4 \qquad \cdots(\text{答})$$

をとる．



例 題　3・2

関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x(x+9)}$ は $x=-1$ で極値 9 をとる．

(1)　a，b を求めよ．

(2)　$f(x)$ の極値，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標および漸近線などを求め，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ．

【解答】

(1)
$$f(x)=\frac{ax+b}{x(x+9)}\quad (x\neq 0,\ x\neq -9).$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2+9x)-(ax+b)(2x+9)}{x^2(x+9)^2}=\frac{-(ax^2+2bx+9b)}{x^2(x+9)^2}.$$

$f(x)$ が $x=-1$ で極値 9 をとるためには，

$$f(-1)=9,\qquad f'(-1)=0$$

となることが必要である．

よって，

$$\begin{cases} a+7b=0, \\ -a+b=-72. \end{cases}\qquad \begin{cases} a=63, \\ b=-9. \end{cases}$$

このとき

$$f(x)=\frac{9(7x-1)}{x(x+9)}$$

であり，

$$f'(x)=\frac{-9(7x^2-2x-9)}{x^2(x+9)^2}=\frac{-9(x+1)(7x-9)}{x^2(x+9)^2}.$$

x	$\cdots$	-9	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{9}{7}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	／	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	／	↘	9	↗	／	↗	$\frac{49}{9}$	↘

よって，$a=63$，$b=-9$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとる．

したがって，

$$a=63,\ b=-9.$$

…(答)

(2) $f(x)$ の増減は，(1) の表の通りである．

また，

$$f''(x) = -9 \cdot \frac{(14x-2)(x^2+9x)^2 - (7x^2-2x-9)2(x^2+9x)(2x+9)}{(x^2+9x)^4}$$

$$= 18 \cdot \frac{7x^3-3x^2-27x-81}{(x^2+9x)^3}$$

$$= 18 \cdot \frac{(x-3)(7x^2+18x+27)}{x^3(x+9)^3}.$$

$f(x)$ の凹凸を調べると，次の表のようになる．

x	$\cdots$	-9	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∪		∩	5	∪

よって，$f(x)$ は

$$\begin{cases} x = -1 \text{ のとき，極小値 } 9, \\ x = \dfrac{9}{7} \text{ のとき，　極大値 } \dfrac{49}{9} \end{cases}$$

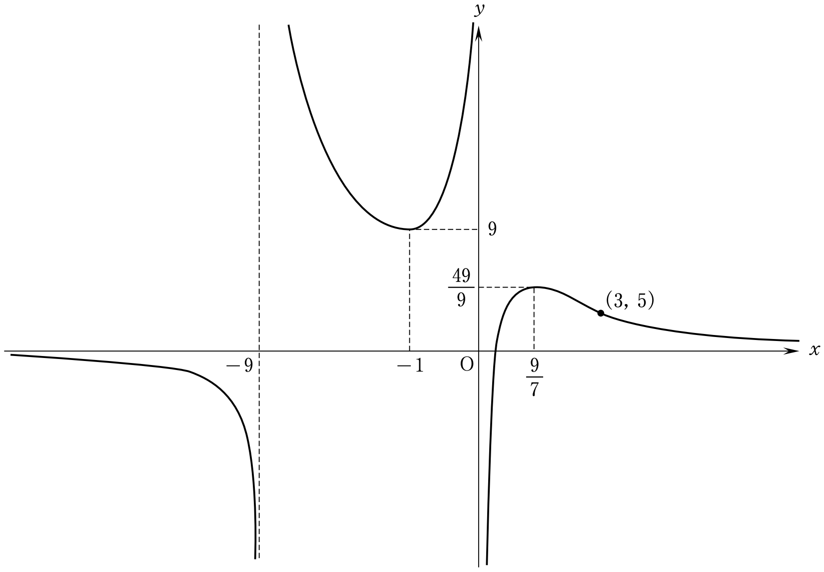
をとり，曲線 $y = f(x)$ は変曲点 $(3,\ 5)$ をもつ．

さらに，

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x \to -9 \pm 0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x \to \pm 0} f(x) = \mp\infty \text{ (複号同順)}$$

であるから，曲線 $y = f(x)$ は漸近線 $y = 0$，$x = -9$，$x = 0$ をもつ．

以上により，曲線 $y = f(x)$ の概形は，次のようになる．



例題 3・3

$0<a<b$ のとき，不等式

$$1-\frac{a}{b}<\log\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1 \qquad \cdots(*)$$

が成り立つことを示せ．

【解答 1】

$x=\dfrac{b}{a}$ とおくと，$0<a<b$ より $x>1$ であり，$(*)$ は

$$1-\frac{1}{x}<\log x<x-1. \qquad \cdots(**)$$

ここで，$g(x)=(x-1)-\log x\ (x>0)$ とおくと

$$x>1 \text{ において } g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0.$$

したがって，$x\geqq 1$ で $g(x)$ は単調増加であり，かつ $g(1)=0$．

よって，

$$x>1 \text{ において，} g(x)>0. \qquad \cdots①$$

また，$h(x)=\log x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$ とおくと

$$x>1 \text{ において } h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}>0.$$

したがって，$x\geqq 1$ で $h(x)$ は単調増加であり，かつ $h(1)=0$．

よって，

$$x>1 \text{ において，} h(x)>0. \qquad \cdots②$$

①，② より $(**)$ が成り立つ．

【解答 2】

$$(*) \iff \frac{b-a}{b}<\log b-\log a<\frac{b-a}{a}$$

$$\iff \frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}. \quad (b-a>0 \text{ より})$$

ここで $f(x)=\log x\ (x>0)$ とすると，$f(x)$ は微分可能，連続であり，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$．

よって，平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ すなわち } \frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c} \qquad \cdots③$$

を満たす $c\ (a<c<b)$ が少なくとも 1 つ存在する．

ところが，$0<a<c<b$ であるから

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}. \qquad \cdots ④$$

③, ④ より,

$$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

となり, (*) は成り立つ.

(解説)

(i) **【解答 1】** では, 式の形に注目して $x = \dfrac{b}{a}(>1)$ とおいたが, 次のようにしてもよい.

(*) の左側の不等式を証明する. $0 < a < b$ で

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{b} < \log\frac{b}{a} &\iff \frac{b-a}{b} < \log b - \log a \\ &\iff b(\log b - \log a) > b - a \\ &\iff b\log b - b(\log a + 1) + a > 0. \qquad \cdots (***) \end{aligned}$$

ここで, a を正の定数として, 関数

$$F(x) = x\log x - x(\log a + 1) + a \quad (x > 0)$$

を考えると, $x > a$ において,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1\cdot(\log a + 1) \\ &= \log x - \log a > 0. \end{aligned}$$

したがって, $F(x)$ は $x \geqq a$ において単調増加であり, かつ $F(a) = 0$.

よって,

$$x > a \text{ において } F(x) > 0.$$

$x = b$ $(b > a)$ とおくと, $F(b) > 0$ であり, (***) が成り立つ.

また, (*) の右側の不等式に関しても同様に証明できる.

ここでは, a を定数として固定し関数 $F(x)$ の増減を調べたが, b を定数として固定して調べてもよい.

(ii) **【解答 2】** のように, 平均値の定理を利用すれば, 一度に 2 つの不等式を証明できることもある. 不等式の特徴に応じて柔軟に対処してほしい.

(注) 2 変数の不等式を微分法を用いて示すには, 次のような方法がよく用いられる.

(ア) 1 文字を変数とみなす (他の文字を固定して考える).

(イ) 例えば, x と y の同次式のときは $\dfrac{y}{x}$ あるいは $\dfrac{x}{y}$ を t とおく.

(ウ) 平均値の定理の利用.

演 習

3・1

曲線 C: $y=e^x$ 上の異なる 2 点 A$(a,\ e^a)$, P$(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q とする．P が A に限りなく近づくときに Q が限りなく近づく点を R とし，AR$=r(a)$ とおく．

(1)　R の y 座標を求めよ．

(2)　$r(a)$ を求めよ．

(3)　a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ．

3・2

(1)　曲線 $y=x\log\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ に直線 $y=ax+b$ が接するとき，$x>0$ の範囲で $x\log\dfrac{1}{x}\leqq ax+b$ が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数である．

(2)　n 個の正の数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ を満たすとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log\frac{1}{x_i}\leqq\log n$ が成り立つことを示せ．また，等号の成り立つ条件を調べよ．

演 習

3・3

長さ2の線分ABを直径とする半円周上に2点P, Qがある．ただし，A, P, Q, Bの順に並ぶとする．4点A, P, Q, Bを頂点とする四角形の面積をSとする．

(1) 半円周の中心をOとする．$\angle \mathrm{AOP}=\alpha$, $\angle \mathrm{BOQ}=\beta$のとき，$S$を$\alpha$, βを用いて表せ．

(2) P, Qが半円周上を動くときのSの最大値を求めよ．