第3講

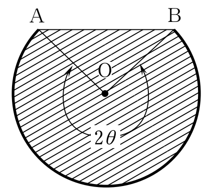
微分法・積分法　(1)

演習

3・1

幅 $2a$ の金属板を曲げて断面が図のような雨樋を作り，その容積を最大にしたい．

図の曲線部分は O を中心とする円の弧である．弧 AB に対する中心角を 2θ として，断面積（斜線部分の面積）S を a と θ とで表し，$0<\theta<\pi$ において S が最大になる θ を求めよ．



3・2

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし，t は正の数とする．

曲線 C: $y=f(x)$ の上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 PT と，法線 PN (PT に垂直な直線) とが，x 軸と交わる点をそれぞれ T, N とする．

(1)　三角形 PTN の面積は，$\dfrac{f(t)^4}{2f'(t)}$ に等しいことを示せ．

(2)　点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ が曲線 C 上を動くとき，三角形 PTN の面積が最小となる点 P の座標と面積の最小値を求めよ．

演　習

3・3

以下の問に答えよ．

(1)　$0<p<1$ と $0<\theta_1<\pi$，$0<\theta_2<\pi$ を満たす p と θ_1，θ_2 に関して，不等式

$$p\sin\theta_1+(1-p)\sin\theta_2 \leqq \sin\{p\theta_1+(1-p)\theta_2\}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　n を 2 以上の自然数とする．$0<\theta_1<\pi$，$0<\theta_2<\pi$，$\cdots$，$0<\theta_n<\pi$ を満たす θ_1，θ_2，$\cdots$，θ_n に対して，不等式

$$\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n}{n} \leqq \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}\right)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n$ のときであることを示せ．

(3)　定点 O を中心とする定円に内接し O を内部に含む n 角形のうち，面積が最大であるものは内接正 n 角形であることを証明せよ．

演　習 3・2 の参考問題

次の問に答えよ．

(1)　$x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおくことにより，不定積分 $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求めよ．

(2)　曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 P$(p,\ q)$ $(p>1,\ q>0)$ と点 A$(1,\ 0)$ がある．2 線分 OA，OP とこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を p の式で表せ．

(3)　(2) における S を $\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，p，q を θ の式で表せ．

（1996　秋田大　医）

第4講 微分法・積分法 (2)

演習

4・1

媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta, \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする.

(1) C の概形を図示せよ.

(2) C が囲む部分の面積を求めよ.

4・2

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく. ただし, $\sin^0 \theta = 1$ とする.

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ が成り立つことを示せ.

(2) nI_nI_{n-1} $(n \geqq 1)$ の値を求めよ.

(3) 数列 $\{I_n\}$ は単調に減少することを示せ.

(4) $\lim_{n\to\infty} n{I_n}^2$ を求めよ.

演習

4・3

a は $0<a<1$ を満たす定数とする．

⑴ $R_n(x)=\dfrac{1}{1-x^2}-(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})$ とする．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a R_n(x)\,dx=0$$

を示せ．

⑵ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$ の和を求めよ．

演　習4・1の類　題

座標平面上で，次のように媒介変数表示される曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x=\sin 2\theta, \\ y=\sin 3\theta. \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

⑴ 曲線 C 上で，$x>0$ かつ $y>0$ となる θ の範囲を求めよ．

⑵ 区間 $0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$|x|=1$ または $|y|=1$ となる θ の値をすべて求めよ．

⑶ 次の 3 つの条件を満たす θ_1, θ_2 の値を求めよ．

$$0\leqq\theta_1<\theta_2\leqq 2\pi,\quad \sin 2\theta_1=\sin 2\theta_2>0,\quad \sin 3\theta_1=\sin 3\theta_2>0.$$

⑷ 曲線 C が自分自身と交わる点の個数を求めよ．

(2005　東京医科歯科大)