2　微分法の不等式への応用

例 1　$x>0$ において不等式 $e^x>x$ が成り立つことを証明せよ．

解　$f(x)=e^x-x$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-1>0\ (x>0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調増加である．したがって，

$$x>0 \text{ で } f(x)>f(0)$$

また，$f(0)=e^0-0=1>0$ であるから，

$$x>0 \text{ で } f(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \text{ で } e^x>x$$

が成り立つ．

問 1　$x>0$ において不等式 $x>\log(1+x)$ が成り立つことを証明せよ．

3　微分法の方程式への応用

例 2　方程式 $\sin x=x-1$ は，$0<x<\pi$ の範囲に実数解を 1 つだけもつことを示せ．

解　$f(x)=\sin x-(x-1)$ とおくと与えられた方程式の実数解は $f(x)=0$ の実数解，すなわち，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=0$（x 軸）の共有点の x 座標に一致する．

$$f'(x)=\cos x-1<0 \quad (0<x<\pi)$$

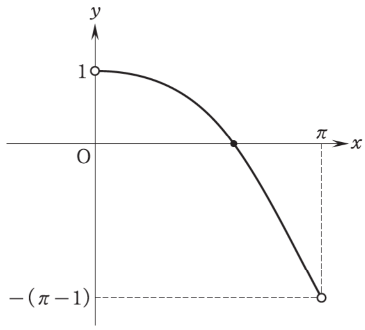
であるから，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq \pi$ で単調減少．

これと，

$$f(0)=1>0, \qquad f(\pi)=-(\pi-1)<0$$

より，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．

よって，方程式 $\sin x=x-1$ は $0<x<\pi$ の範囲に実数解を 1 つだけもつ．



問 2　方程式 $2x\log x=x+1$ は，$\dfrac{1}{e}<x<e$ の範囲に実数解を 1 つだけもつことを示せ．

練 習

3・1 すべての正の数 x に対して，$\dfrac{e^x}{x^2} \geqq a$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

3・2 a は実数の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{3}{x^2}$ が，$x>1$ において極大値および極小値をもつような a の値の範囲を求めよ．