第1講　2次関数とその応用

1　2次関数の最大・最小

a, b, c を実数の定数とする x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ は

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

と平方完成すれば，そのグラフ（放物線）を描くことができる．

最大値・最小値を求める問題では，定義域に注意してグラフを描き，y 座標の最も大きい値，最も小さい値を読みとればよい．

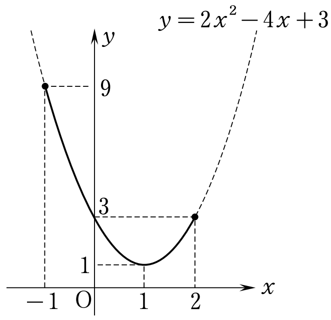
例1　2次関数 $y=2x^2-4x+3$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めてみよう．

解

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-4x+3 \\ &= 2(x-1)^2+1. \end{aligned}$$

よって，この関数のグラフは右のようになるから，

$$\begin{cases} x=-1 \text{ のとき最大値 } 9, \\ x=1 \text{ のとき最小値 } 1. \end{cases}$$

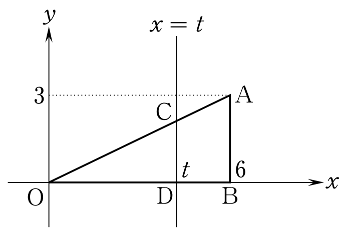


問1　2次関数 $y=x^2-4x+5$ の最大値，最小値を以下の各場合について求めよ．

(1)　定義域が $0 \leqq x \leqq 3$

(2)　定義域が $-1 \leqq x \leqq 1$

1・3 右の図のように xy 平面上に 3 点 O(0, 0), A(6, 3), B(6, 0) を頂点とする三角形 OAB がある. 直線 $x=t$ $(0<t\leqq 6)$ と辺 OA, 辺 OB の交点をそれぞれ C, D とする.



CD を一辺とする正方形 CDEF を

$$(\text{E の } x \text{ 座標}) > t$$

となるように作り, 三角形 OAB と三角形 CDF の共通部分の面積を S とする.

(1) S を t で表せ.

(2) $0<t\leqq 6$ における S の最大値, およびそのときの t の値を求めよ.

1・4

x の関数

$$f(x)=x^2+2x+2,\qquad g(x)=-x^2+2ax+2-2a^2$$

について，次の条件が成り立つような実数の定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$

(2) すべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$