第1講　存在条件

次の問題を考えてみよう．

例　x の方程式

$$\left(a^2+a+1\right)x-2a-1=0 \qquad \cdots (*)$$

について，a が実数全体を動くとき，(*) の実数解のとり得る値の範囲を求めよ．

まず，本問の仕組みを考えてみよう．

(*) において，a にいろいろな値を代入してその解を調べてみる．

$a=1$ のとき，(*) は $3x-3=0$ となるので，その解は，

$$x=1$$

$a=-3$ のとき，(*) は $7x+5=0$ となるので，その解は，

$$x=-\frac{5}{7}$$

$a=\sqrt{2}$ のとき，(*) は $\left(3+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}-1=0$ となるので，その解は，

$$x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

このように，1 つの a の値に対して (*) の解が 1 つ定まっていく．

a	$\longmapsto$	(*) の解
（与える）		（定まる）

一般に，(*) を x について解いてみると，

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4}$$

より，

$$a^2+a+1\neq 0$$

であるから，

$$x=\frac{2a+1}{a^2+a+1}$$

となる．

したがって，(*) の解のとり得る値の範囲は，

$$a\text{ が実数全体を動くときの }\frac{2a+1}{a^2+a+1}\text{ のとり得る値の範囲} \quad \cdots(☆)$$

である．

しかし，(☆) の範囲を直接求めることは，困難である．

そこで，(*) の解が定まっていく仕組み，

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & (*)\text{ の解} \\ （\text{与える}） & & （\text{定まる}） \end{array}$$

の逆向きの対応，すなわち，

「(*) において，x の値を与えたときの a の値はどのような値か」

について考えてみる．

実際に，x にいろいろな値を代入して実験してみると，次のようになる．

(ア) (*) において，$x=0$ とするとき，

$$\left(a^2+a+1\right)\cdot 0-2a-1=0$$
$$-2a-1=0$$
$$a=-\frac{1}{2}$$

(イ) (*) において，$x=1$ とするとき，

$$\left(a^2+a+1\right)\cdot 1-2a-1=0$$
$$a^2-a=0$$
$$a(a-1)=0$$
$$a=0,\ 1$$

(ウ) (*) において，$x=2$ とするとき，

$$\left(a^2+a+1\right)\cdot 2-2a-1=0$$
$$2a^2+1=0$$
$$a^2=-\frac{1}{2}$$

これを満たす実数 a は存在しない．

これら (ア), (イ), (ウ) は次のように解釈することができる．

(ア)　$x=0$ が (*) の解となるような実数 $a=-\dfrac{1}{2}$ が存在したので，

$x=0$ は (*) の解となり得る．

(イ)　$x=1$ が (*) の解となるような実数 $a=0$ または $a=1$ が存在したので，

$x=1$ は (*) の解となり得る．

(ウ)　$x=2$ が (*) の解となるような実数 a は存在しなかったので，

$x=2$ は (*) の解となり得ない．

したがって，逆向きの操作

x の値　$\longmapsto$　a の値
（与える）　　（定まる）

において，x に実数を代入したとき，実数 a が存在するような x の値すべてを集めたものが，(*) の解 x のとり得る値の範囲である．

この考え方を用いて解答すると，次のようになる．

解　$x=k$ が (*) の実数解となる条件は，

$$\left(a^2+a+1\right)k-2a-1=0$$

すなわち，

$$ka^2+(k-2)a+k-1=0$$

を満たす実数 a が存在することであり，これは，a の方程式

$$ka^2+(k-2)a+k-1=0 \qquad \cdots ①$$

が実数解をもつことと同値である．

(i)　$k=0$ のとき，① は $-2a-1=0$ となるので，実数 $a=-\dfrac{1}{2}$ が存在する．

よって，$k=0$ は条件を満たす．

(ii)　$k\neq 0$ のとき，① は a の 2 次方程式であるから，その判別式を D とすると，① が実数解をもつ条件は，

$$D\geqq 0$$

よって，

$$(k-2)^2-4k(k-1)\geqq 0$$
$$-3k^2+4\geqq 0$$

$$k^2 \leqq \frac{4}{3}$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq k \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$k \neq 0$ より，

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq k < 0, \quad 0 < k \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(i), (ii) より，

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq k \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

したがって，(*) の実数解 x のとり得る値の範囲は，

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

練習

1・1 x の2次方程式

$$x^2+ax+a^2+3a-9=0 \qquad \cdots(*)$$

について，a が実数全体を動くとき，(*)の実数解のとり得る値の範囲を求めよ．

1・2 実数 x，y は，

$$x^2-xy+y^2=2 \qquad \cdots(*)$$

を満たしている．

$$x+y=u, \quad xy=v$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) v を u の式で表せ．

(2) 実数 x，y が(*)を満たして変化するとき，$u+v$ のとり得る値の範囲を求めよ．