第4講 図形と方程式

例題 4・1

t が任意の実数値をとりながら変化するとき，

$$x=t+1,\quad y=(t-1)^2$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

考え方

xy 平面上において，直線，放物線などの図形は，その図形上の点の「x 座標と y 座標の満たす関係式」で表されることが多い．

与えられた2つの等式から t を消去して「x と y の満たす(t を含まない)関係式」を導くと，t が変化したときに点 $(x,\ y)$ が動いてできる図形(軌跡)を求めることができる．

解答

$x=t+1$ から，$t=x-1$．

それを $y=(t-1)^2$ に代入して t を消去すると

$$y=\{(x-1)-1\}^2.$$

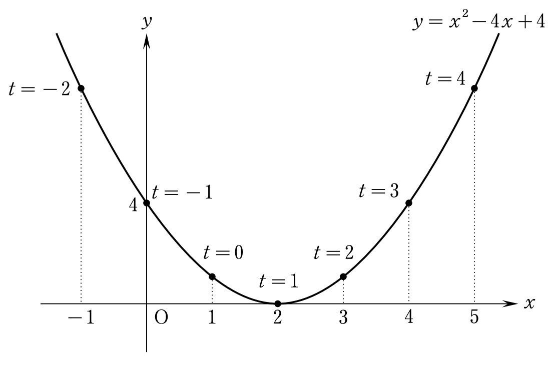
したがって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は

放物線　$y=(x-2)^2$.

☜ t を消去したいときには，与えられた条件を t について解いておくとよい．

(注)

t の値の変化に伴う点 $(x,\ y)$ の動きは次のようになっている．



練 習

4・3

t は実数であるとする．xy 平面上に 2 つの放物線

$$C_1: y=x^2, \qquad C_2: y=-x^2+4tx+2t^2+2$$

がある．

(1) t の値にかかわらず，C_1，C_2 は 2 点で交わることを示せ．

(2) C_1 と C_2 の交点を P，Q とする．直線 PQ の方程式を求めよ．

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき，(2) で求めた直線の通過する範囲を求め，図示せよ．

3・4 n を正の整数とし，多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=(x+1)(x+2)^n$$

と定める．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $(x+2)^n$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ．

(3) $P(x)$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ．

4・4 xy 平面上に 2 つの放物線

$$C_1: y=(x-a)^2+b,\ C_2: y=-x^2$$

がある．

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，b を a を用いて表せ．

(2) 実数 a，b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C_1 と C_2 の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ．