第3講　複素数と方程式

1　複素数

A　複素数の定義

$x^2=-1$ を満たす実数 x は存在しない．しかし，数の範囲を広げることによって係数がすべて実数である2次方程式の解をすべて考えることができる．

2乗して -1 になる数の1つを考え，それを i と表す．つまり，i は，

$$i^2=-1$$

を満たす数である．この i を**虚数単位**という．また，

$$a+bi\ (a,\ b \text{ は実数})$$

の形で表された数を考え，このように表された数を**複素数**という．

複素数 $a+bi$ (a，b は実数) に対して，a を**実部**，b を**虚部**という．$b=0$ のとき，虚部が0である複素数 $a+0i$ は実数 a を表すものとし，$b \neq 0$ のとき，複素数 $a+bi$ を **虚数** という．特に，bi ($b \neq 0$) の形の虚数を純虚数という．

複素数 $a+bi$	
実数 a ($b=0$)	虚数 $a+bi$ ($b \neq 0$)

$a+bi$ (a，b は実数) に対して，$a-bi$ を $a+bi$ の**共役複素数**といい，$\overline{a+bi}$ で表す．

例 1　複素数 $-2+4i$ は，虚数であり，実部は -2，虚部は4．
複素数1は，実数であり，実部は1，虚部は0．
複素数 $-\frac{i}{2}$ は，純虚数であり，実部は0，虚部は $-\frac{1}{2}$．

問 1　次の複素数の実部と虚部を答えよ．

(1)　$1-\sqrt{5}\,i$　　(2)　$-7i$

B　複素数の相等

2つの複素数 $a+bi$，$c+di$ (a，b，c，d は実数) において，互いの実部，虚部が一

致するときを２つの複素数は等しいといい，

$$a+bi=c+di$$

と表す．つまり，

$a,\ b,\ c,\ d$ が実数のとき，

$$\boldsymbol{a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d}$$

特に，$\boldsymbol{a+bi=0 \iff a=b=0}$

(注) 次のことも成り立つ．$a,\ b,\ c,\ d$ を実数，α を虚数とするとき，

$$\boldsymbol{a+b\alpha=c+d\alpha \iff a=c,\ b=d}$$

C 四則計算

複素数では虚数単位 i をふつうの文字と同じように扱って計算する．ただし，i^2 は -1 に置き換えて計算する．

(1) 加法：　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

(2) 減法：　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

(3) 乗法：　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

(4) 除法：　$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

ただし，$(c,\ d)\neq(0,\ 0)$．

例２　(1) $(1+3i)+(2+3i)=(1+2)+(3+3)i=3+6i.$

(2) $(1+3i)-(2+3i)=(1-2)+(3-3)i=-1.$

(3) $(1+3i)(2+3i)=(2-9)+(3+6)i=-7+9i.$

(4) $\dfrac{3}{1+i}=\dfrac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3(1-i)}{1^2-i^2}=\dfrac{3-3i}{2}.$

問２　次の計算をせよ．

(1) $(2+2i)+(1+3i)$　(2) $(3+2i)-(2+i)$　(3) $i(2+i)$

D 負の数の平方根

負の数に対しても平方根を表す記号を定義する．

$$a>0 \text{ に対して，} \boldsymbol{\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i}$$

計算には注意が必要である．$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ が成り立つが，一般に

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$$

である．実際

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\sqrt{3}\,i=-\sqrt{6}$$

に対して，

$$\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$$

であるから

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}.$$

例3　x の 2 次方程式

$$x^2=-2$$

の解は，

$$x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}\,i.$$

問3　次の方程式を解け．

(1)　$x^2=-7$　　　(2)　$3x^2+9=0$

3・3

$$\begin{cases}(\alpha-1)(\beta-1)=4,\\(\alpha+1)(\beta+1)=2a+4\end{cases}$$

を満たす実数 α, β $(\alpha \neq \beta)$ が存在するような実数 a の値の範囲を求めよ．