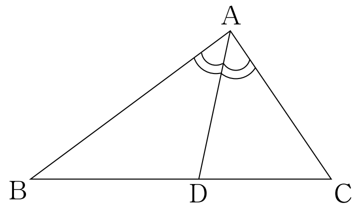
基本事項

1　平面図形

例1　右図の三角形 ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，三角形 ABD，三角形 ACD の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする．



(1)　$S_1 : S_2$ を BD，DC を用いて表せ．

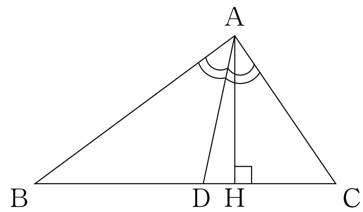
(2)　$S_1 : S_2$ を AB，AC を用いて表せ．

(3)　AB : AC = BD : DC が成り立つことを示せ．

解

(1)　A から直線 BC に垂線 AH を下ろすと，

$$S_1 : S_2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AH}\right) : \left(\frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot\mathrm{AH}\right) = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}.$$



(2)　D から直線 AB，AC に垂線 DE，DF をそれぞれ下ろすと，

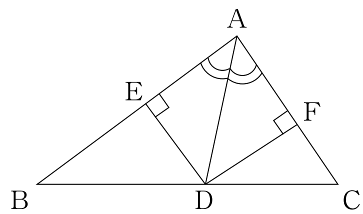
$$\angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{AFD} = 90^\circ,\ \angle\mathrm{EAD} = \angle\mathrm{FAD}.$$

辺 AD は共通であるから，

$$\triangle\mathrm{AED} \equiv \triangle\mathrm{AFD}.$$

よって，

$$\mathrm{DE} = \mathrm{DF}.$$



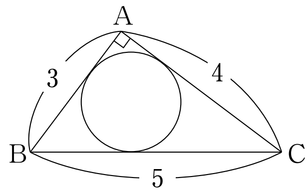
したがって，

$$S_1 : S_2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DE}\right) : \left(\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DF}\right) = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$(S_1 : S_2 =)\,\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}.$$

例 2　AB = 3, BC = 5, CA = 4 である直角三角形 ABC の内接円の半径を求めよ.



解

三角形 ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6.$$

内接円の半径を r とすると,

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

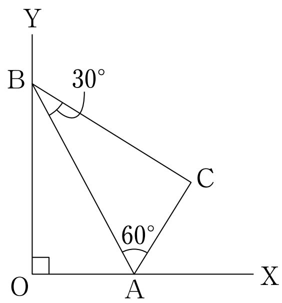
であるから,

$$6=\frac{1}{2}r(3+5+4).$$

よって,

$$r=1.$$

例 3　平面上に O を端点とし, 直交する 2 本の半直線 OX, OY がある. OX, OY 上の O 以外の部分にそれぞれ点 A, B があり, さらに直線 AB に関して O と反対側に点 C がある. 3 点 A, B, C は, AB = 2, $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の三角形を作るように動く. このとき, 線分 OC の長さの最大値を求めよ.



解

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$, AB = 2 より, 4 点 O, A, C, B は, 線分 AB を直径とする半径 1 の円周上にある.

第3講 論理的に考える

練習

3・1

n を正の整数とし，4 個の実数 a_1，a_2，a_3，a_4 が次の条件(i)，(ii)を満たしているとする．

(i) $a_1+a_2+a_3+a_4=2n$

(ii) a_1，a_2，a_3，a_4 の中の任意の 2 数 a_i，a_j $(i \neq j)$ について，$a_i+a_j \leqq n$ ならば a_i+a_j は偶数である．

このとき，

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 の中の任意の 2 数 a_i，a_j $(i \neq j)$ の和 a_i+a_j はすべて偶数であることを証明せよ．

(2) a_1，a_2，a_3，a_4 はすべて整数であることを証明せよ．

(3) a_1，a_2，a_3，a_4 をすべて異なる正の数とする．$n=10$ の場合に a_1，a_2，a_3，a_4 の組の個数を求めよ．

3・2

(1) 1 辺の長さが 2 の正三角形の内部に，任意の 5 点をとったとき，そのうちの 2 点で，距離が 1 より小さいものが少なくとも 1 組存在することを示せ．

(2) xyz 空間内の任意の異なる m 個の格子点をとっても，そのうちの 2 点で，その中点が格子点となるものが存在するような正の整数 m の最小値を求めよ．ただし，xyz 空間内の格子点とは，空間内の点 $(x,\ y,\ z)$ で x，y，z がすべて整数であるものをいう．

3・3

点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A，B，C がある．線分 BC，CA，AB の中点をそれぞれ P，Q，R とする．線分 OP，OQ，OR のうち少なくとも 1 つは長さが $\frac{1}{2}$ 以上であることを証明せよ．