第3講 整数の性質

本講では，中学の数学でも扱われてきた「整数」を題材にして，いろいろな問題を考えていきたいと思う．「整数」については，高校の数学でも「数学A」の分野で扱われ，中学で学んだ事項の応用や整数の性質に関する一般的な理論を学ぶことになる．

1 約数と素因数分解

まず初めに，中学の数学で学習した「約数」と「素因数分解」について，復習していこう．

A 約数

「36の（正の）約数をすべて求めよ．」と言われたら，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$$

の9個の整数を答えるであろう．これは，

> 正の整数 A が，2つの正の整数 B, Q を用いて
> $$A = B \times Q$$
> の形に表されるとき，B を A の**約数**という

といった約束事（**定義**）に基づいて，36を

$$1\times 36,\quad 2\times 18,\quad 3\times 12,\quad 4\times 9,\quad 6\times 6$$

のように2つの整数を用いた積の形で表すことで得られたものである．

高校の数学では，「負の約数」や「負の整数に対する約数」も同様にして定めることになる．例えば，4を2つの整数を用いた積の形で表すと，

$$1\times 4,\quad 2\times 2,\quad (-1)\times(-4),\quad (-2)\times(-2)$$

となるから，4の約数をすべてあげると

$$1,\ 2,\ 4,\ -1,\ -2,\ -4$$

である．

B 素数

2 以上の整数のうち，1 とそれ自身以外に正の約数をもたないものを**素数**という（したがって，1 は素数ではないことに注意）．

例えば，7 の正の約数は 1 と 7 であるから，7 は素数である．また，8 の正の約数は 1，2，4，8 であるから，8 は素数ではない（2 以上の整数のうち，素数ではないものを**合成数**という）．

素数を求める方法として，**エラトステネスの篩**(ふるい)(The sieve of Eratosthenes) がある．

N を 2 以上の整数とする．このとき，N 以下の整数のうち，素数であるものは，次の手順で求めることができる．

(1) まず，1 に斜線を引く．

(2) 斜線を引いていない整数のうち，最小の整数を○で囲む（その整数を m とする）．

(3) m 以外の m の倍数すべてに斜線を引く．

(4) (2), (3) を，$\sqrt{N}$ 以下の m に対して繰り返し行う．

(5) ○で囲まれた整数が N 以下の素数である．

例えば，50 以下の素数をすべて求める場合は，$\sqrt{50}=7.07\cdots$ であるから，順に $m=2,\ 3,\ 5,\ 7$ に対して (2), (3) を繰り返し，右表が得られる．これより，50 以下の素数は，

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

2，3，5，7，11，13，17，19，
23，29，31，37，41，43，47

であることがわかる．

数学者のみならず地理学者，天文学者として知られているエラトステネス（紀元前 275 ～紀元前 194）のニックネームは「β（2 番目）」であったと言われている．「α（1 番）」ではないことに，ただただ驚きを感じるばかりである．

C　素因数分解

36 をいくつかの素数の積の形で表すと，

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

となる．このように，合成数は，いくつかの素数の積として 1 通りに表すことができる．それらの素数をその合成数の**素因数**という．また，合成数を素因数の積として表すことを**素因数に分解する**といい，表したものを**素因数分解**という．

ここで，36 の正の約数を素因数分解の観点から考えてみよう．

36 の正の約数は，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$$

であった．この 9 個の約数を素数の積の形で表すと，

$$2^0 \times 3^0,\quad 2^1 \times 3^0,\quad 2^0 \times 3^1,\quad 2^2 \times 3^0,\quad 2^1 \times 3^1,$$
$$2^0 \times 3^2,\quad 2^2 \times 3^1,\quad 2^1 \times 3^2,\quad 2^2 \times 3^2$$
$$(2^0 = 1,\ 3^0 = 1 \text{ とする})$$

となり，いずれも $\{2^0,\ 2^1,\ 2^2\}$ の要素と $\{3^0,\ 3^1,\ 3^2\}$ の要素の積で表されていることがわかる．また，要素の積についてのすべての組合せが表されている．このように，ある合成数の正の約数をすべて求める際には，その合成数の素因数分解を与えておくとよい．

練習

3・1 次の問に答えよ．

(1) 次の値をそれぞれ 2^k-1 (k は正の整数) の形に表せ．

(i) $1+2+2^2$

(ii) $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5$

(2) 次の式を展開せよ．

(i) $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

(ii) $(x-1)\left(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1\right)$ (n は正の整数)

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^n$ (n は正の整数) の値を求めよ．

3・2 N を正の整数とし，1 から N までの N 個の整数の積を $N!$ で表す．すなわち，

$$N!=1\times2\times3\times\cdots\times(N-1)\times N$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $8!$ を素因数に分解せよ．

(2) n を正の整数とするとき，$\left(2^{n+1}\right)!$ は素因数 2 をいくつ含むか．

3・3　次の問に答えよ．

(1)　24 の正の約数，およびその総和を求めよ．

(2)　n を正の整数とするとき，$2^n \times 3$ の正の約数の総和を求めよ．

(3)　正の整数 N について，N の正の約数の総和が $2N$ となる N を完全数という．例えば，6 の正の約数は 1，2，3，6 であり，その総和について，

$$1+2+3+6=2\times 6$$

が成り立つから，6 は完全数である．

n を正の整数，p を 2 でない素数とするとき，$2^n \times p$ の形で表される 6 以外の完全数を 2 つ求めよ．