第 1 講　2 次関数

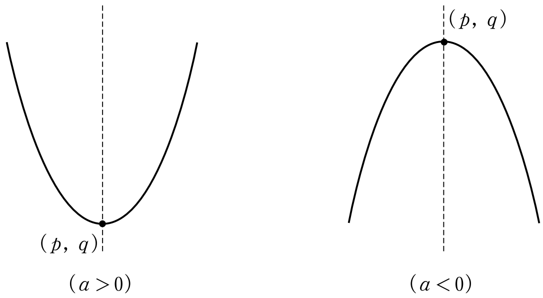
基本事項

◇　2 次関数のグラフ（放物線）

❶　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$$\begin{cases} 軸は\ x=p, \\ 頂点は\ (p,\ q) \end{cases}$$

であり，$a>0$ であれば下に凸の，$a<0$ であれば上に凸の放物線．



❷　平方完成

$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ となるので，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の

$$\begin{cases} 軸は\ x=-\dfrac{b}{2a}, \\ 頂点は\ \left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right). \end{cases}$$

◇　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a,\ b,\ c$：実数）について

❸　解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

とくに，$b=2b'$ のとき，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

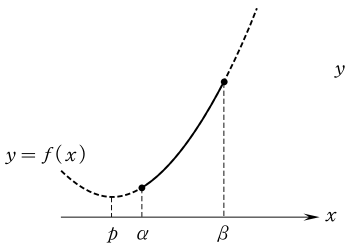
◇　2次関数の最大・最小

❹　軸の位置による場合分け

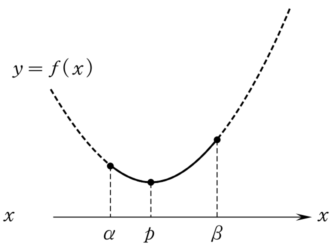
$\alpha \leqq x \leqq \beta$ における $f(x)=a(x-p)^2+q$ の最大・最小について，例えば $a>0$ のとき，次のような場合がある．

(1)　最小値 (範囲の両端と軸との位置関係により，3つの場合がある)．

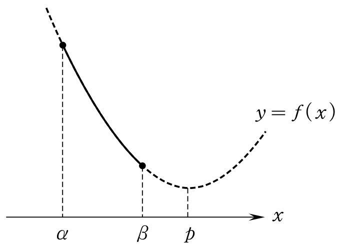
$p<\alpha$ のとき　　　$\alpha \leqq p \leqq \beta$ のとき　　　$\beta<p$ のとき



最小値は $f(\alpha)$



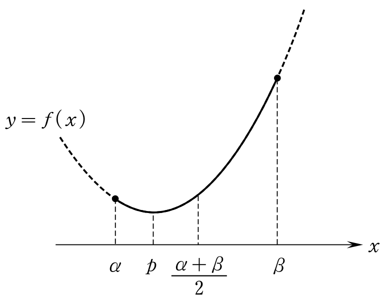
最小値は $f(p)$



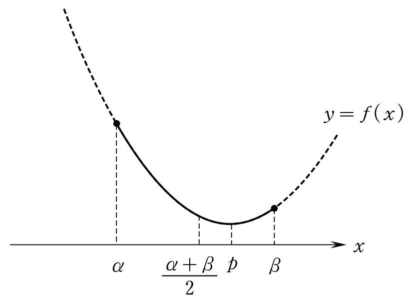
最小値は $f(\beta)$

(2)　最大値 (範囲のまん中と軸との位置関係により，2つの場合がある)．

$p \leqq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき　　　$\dfrac{\alpha+\beta}{2} \leqq p$ のとき



最大値は $f(\beta)$



最大値は $f(\alpha)$

いずれにせよ，グラフをもとに，軸の位置などを考慮して判断すればよい．

演 習

1・1

⑴　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ -4)$ を通る．
a，b，c の値を求めよ．

（中央大）

⑵　2 次関数 $y=2x^2+ax+b\ (a>0)$ のグラフは，点 $(0,\ 8)$ を通り，頂点が直線 $y=2x$ 上にある．このとき，$a=$ $^{ア}\boxed{}$，$b=$ $^{イ}\boxed{}$ である．

（名城大）

⑶　次の連立不等式を解け．

$$\begin{cases} 4x^2-4x-15<0 \\ x^2-2x\geqq 0 \end{cases}$$

（愛媛大）

⑷　定義域が $0\leqq x\leqq 3$ である 2 次関数 $y=-ax^2+2ax+b$ の最大値が 3，最小値が -5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

（中央大）

1・2

a を定数とする．2 次関数 $y=x^2+ax-a^2+5a$ について，

⑴　この関数のグラフが x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

⑵　この関数のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -5 平行移動すると，原点 O を通る放物線となるとき，a の値を求めよ．

⑶　この関数の $-5\leqq x\leqq 3$ における最大値が 0 であるとき，a の値を求めよ．

（東北学院大〈改〉）