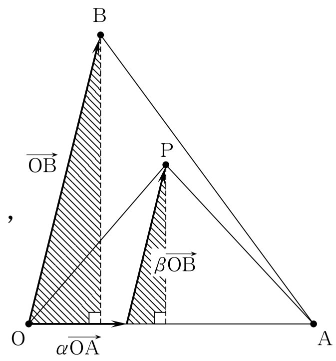
第 1 講 ベクトル

◇ 三角形の面積比の基本



三角形 OAB に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とすると，三角形 OAB と三角形 OAP は底辺 OA が共通であり，高さの比は右図より

$$1:|\beta|$$

となる．（斜線部の二つの直角三角形が相似）

点 P が底辺 OA からどれぐらい離れているのかは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の $\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定まるということだ．

よって，この二つの三角形の面積比は

$$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OAP}=1:|\beta|$$

となる．

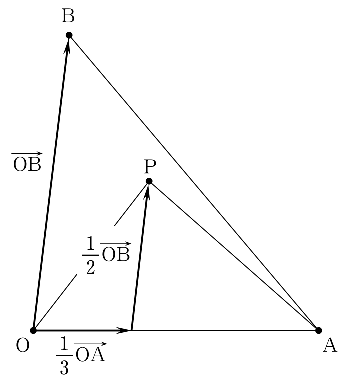
例題 1・1

三角形 OAB に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定めるとき，三角形 OAB と三角形 OAP の面積比を求めよ．

【解答】



三角形 OAB と三角形 OAP は底辺 OA が共通であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より右図のようになり，高さの比は

$$1:\frac{1}{2}$$

となる．

よって，この二つの三角形の面積比は

$$\triangle \mathrm{OAB} : \triangle \mathrm{OAP} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1. \qquad \cdots(\text{答})$$

面積比の練習問題

練習 1

三角形 OAB に対して，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定めるとき，面積比

$$\triangle \mathrm{OAP} : \triangle \mathrm{OBP} : \triangle \mathrm{PAB}$$

を求めよ．

練習 2

三角形 OAB に対して，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定めるとき，面積比

$$\triangle \mathrm{OAP} : \triangle \mathrm{OBP} : \triangle \mathrm{PAB}$$

を求めよ．

演 習

1・1

三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=1$ とし，辺 AB の中点を M，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB の交点を D とする．さらに，直線 OD に点 A から下ろした垂線の足を H とし，直線 OM と直線 AH の交点を E とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線 AH と直線 OB の交点を B′ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表し，$\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{OA}$ となることを示せ．

（鹿児島大〈改〉）

演 習

1・2

xyz 空間に 5 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0), E(0, 0, 1) を頂点とする四角錐 V があり，正四面体 PBCE が V の外部にできるように点 P を定める．

⑴ P の座標を求めよ．

⑵ P は平面 ABE 上にあることを示せ．

（東京学芸大〈改〉）