1 (ここには 1 の解答を記入すること。)

試行(＊) を 1 回行うとき，事象 A，B を

A：点 P が正の向きに 1 だけ進む，

B：点 P が負の向きに 2 だけ進む

により定めると，

A が生じる確率は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$，

B が生じる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(1) A が 2 回，B が 1 回生じるときであるから，確率は，

$${}_3C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64} \quad \cdots(答)$$

(2) A が 4 回，B が 2 回生じるときであるから，確率は，

$${}_6C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1215}{4096} \quad \cdots(答)$$

(3) 試行(＊)を n 回繰り返すとき，A が a 回，B が b 回生じるとする。(a，b は 0 以上の整数)

このとき，P の座標を p とすると，

$$\begin{aligned} p &= 1\cdot a+(-2)\cdot b \\ &= (n-b)-2b \qquad (a+b=n \text{ より}) \\ &= n-3b \end{aligned}$$

n は 3 で割り切れない整数だから，$p=0$ となることはない。

したがって，求める確率は，

$$0 \quad \cdots(答)$$

2　(ここには $\boxed{2}$ の解答を記入すること。)

(1)　$x_{n+1}=(x_n)^5\cdot(y_n)^2$ より，$\log_2 x_{n+1}=5\log_2 x_n+2\log_2 y_n \Leftrightarrow a_{n+1}=5a_n+2b_n$ ……①

$y_{n+1}=x_n\cdot(y_n)^6$ より，$\log_2 y_{n+1}=\log_2 x_n+6\log_2 y_n \Leftrightarrow b_{n+1}=a_n+6b_n$ ……②

次に，数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるには少なくとも

$$(a_1+kb_1)(a_3+kb_3)=(a_2+kb_2)^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立たないといけない．ここで，$a_1=\log_2 x_1=1\,, b_1=\log_2 y_1=-1$ と①，②より

$a_2=3\,, b_2=-5\,, a_3=5\,, b_3=-27$ であるから $(*)$ は

$$(1-k)(5-27k)=(3-5k)^2$$

となる．この k の方程式を解くと，

$$5-32k+27k^2=9-30k+25k^2 \Leftrightarrow k^2-k-2=0 \Leftrightarrow (k+1)(k-2)=0$$

より $k=-1\,,2$

一方，①－② より $a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が得られ，数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 4 の等比数列．

①＋②×2 より $a_{n+1}+2b_{n+1}=7(a_n+2b_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が得られ，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は公比 7 の等比数列となる．

したがって，$k=-1\,,2$ は $\{a_n+kb_n\}$ を等比数列にする k の値であり，これらがそのすべてである．

以上より，求める k の値は $k=-1\,,2$ …… [答]

(2)　(1)より，数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=2$，公比 4 の等比数列で，

$$a_n-b_n=2\cdot 4^{n-1} \quad \cdots\cdots③$$

数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=-1$，公比 7 の等比数列で，

$$a_n+2b_n=-7^{n-1} \quad \cdots\cdots④$$

(④－③)÷3 より，$b_n=\dfrac{-2\cdot4^{n-1}-7^{n-1}}{3}$ ，(③×2＋④)÷3 より，$a_n=\dfrac{4^n-7^{n-1}}{3}$

$x_n=2^{a_n}$ であるから，$x_n=2^{\frac{4^n-7^{n-1}}{3}}$ …… [答]

3 (ここには3の解答を記入すること。)

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x$$

$$= 2x(2x^2 + 2ax + a + 2).$$

(1) $f'(x)$ が正から負に変化する x が少なくとも1つ存在するような a の値の範囲を求めればよい．

$g(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ とおき，$g(x) = 0$ の判別式を D とする．

$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 4$ である．

(ア) $D \leqq 0$ すなわち $1-\sqrt{5} \leqq a \leqq 1+\sqrt{5}$ のとき．

$$g(x) = 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + a + 2$$

$$= 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{D}{8}$$

$$\geqq 0$$

であり，$f'(x) = 2x\,g(x)$ であるから，$f'(x)$ が正から負に変化する x は存在しない．

(イ) $g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもつ，すなわち $a = -2$ のとき．

$g(x) = 2x^2 - 4x$ より

$f'(x) = 4x^2(x-2)$ であり，

$f'(x)$ が正から負に変化する x は存在しない．

(ウ) $D > 0$ かつ $a \neq -2$ のとき．

$f'(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもつ（そのうち1つは $x = 0$）．

3解を小さい順に α, β, γ とすれば，$f(x)$ の増減は次表．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x = \beta$ で極大値をとり，適する．

以上より，求める範囲は

$$a < -2,\ -2 < a < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < a.$$

…［答］

(2) (1) の (ウ) において $\beta = 0$ であればよい．

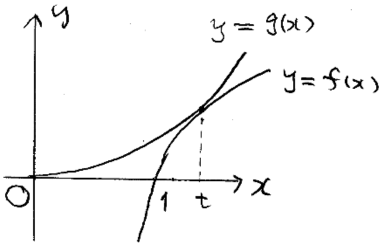
それは $g(x) = 0$ が正の解と負の解を1つずつもつときであり，そのための条件は

$g(0) = a + 2 < 0$．

よって，求める範囲は

$$a < -2.$$ …［答］

4 (ここには 4 の解答を記入すること。)



$$\begin{cases} f(x) = n\log x & (x>0) \\ g(x) = ax^n \end{cases}$$

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ において点を共有し，その点における両曲線の接線の傾きが等しい条件は

$$\begin{cases} n\log t = at^n \cdots\cdots ① \\ \dfrac{n}{t} = nat^{n-1} \cdots ② \end{cases}$$

② より $at^n = 1$ すなわち $t = a^{-\frac{1}{n}}$．これを ① に代入して

$-\log a = 1 \quad \therefore \quad \underline{a = \frac{1}{e}} \cdots$ [答]

(2) $t = e^{\frac{1}{n}}$ だから

$$S_n = \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{e}x^n dx - \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} n\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{e(n+1)}x^{n+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{n}}} - n\left[x\log x - x\right]_1^{e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{e(n+1)}e^{\frac{n+1}{n}} - n\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right)$$

$$= -\frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \underline{\frac{n^2}{n+1}e^{\frac{1}{n}} - n} \cdots \text{[答]}$$

(3)
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}}\right) = -1\cdot 1 = -1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\because \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1\right) \end{cases}$$

より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -1+1 = \underline{0} \cdots \text{[答]}$$

5 （ここには 5 の解答を記入すること。）

(1) $\overrightarrow{NQ}=t\overrightarrow{NP}$（$t$は実数）とおけるので，

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{ON}+t\overrightarrow{OP}$

$=(1-t)(0,0,1)+t(a,b,c)$

$=(at,\ bt,\ 1-t+ct)$

Qはxy平面上であるから，$1-t+ct=0$．$c\neq1$に注意して，$t=\dfrac{1}{1-c}$．

よって，$Q\left(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c},0\right)$．……（答）

(2) (1)の結果において，$p=\dfrac{a}{1-c}$，$q=\dfrac{b}{1-c}$ とおくと，

$a=(1-c)p$，$b=(1-c)q$．

点(a,b,c)はS上にあるから，$a^2+b^2+c^2=1$．

$\{(1-c)p\}^2+\{(1-c)q\}^2+c^2=1$．

$(p^2+q^2+1)c^2-2(p^2+q^2)c+p^2+q^2-1=0$．

$(c-1)\{(p^2+q^2+1)c-(p^2+q^2-1)\}=0$．

$c\neq1$に注意して，$c=\dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}$．

よって，求める交点は $\left(\dfrac{2p}{p^2+q^2+1},\dfrac{2q}{p^2+q^2+1},\dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$．……（答）

(3) $Q(p,q,0)$とおく．このとき，PはS上であるから，Pの座標は(2)の結果である．

Pは平面α上でもあるから，$A\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$\vec{n}=(3,4,5)$として，

$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ つまり $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$をみたす．よって，

$\dfrac{1}{2(p^2+q^2+1)}(4p,4q,p^2+q^2-3)\cdot(3,4,5)=0$．

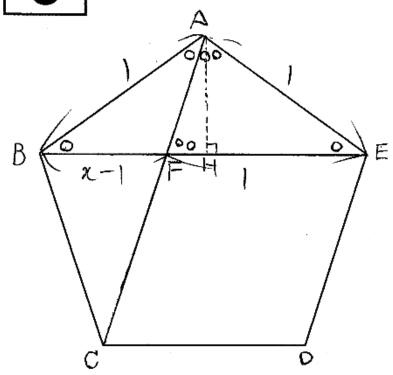
$12p+16q+5(p^2+q^2-3)=0$．

$p^2+\frac{12}{5}p+q^2+\frac{16}{5}q-3=0$．

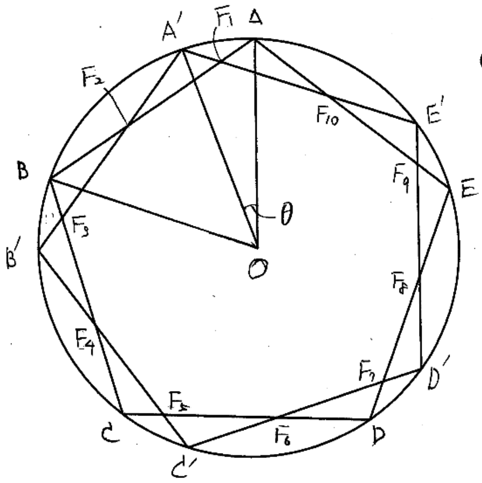
$\left(p+\frac{6}{5}\right)^2+\left(q+\frac{8}{5}\right)^2=7$．

よって，Qはxy平面上の円周上を動く．（証明終り）

6 (ここには 6 の解答を記入すること。)



(図I)



(図II)

(1) 図Iの正五角形ABCDEで対角線$BE=x$とすると

$BF=x-1$で$\triangle ABF \backsim \triangle EBA$より

$AB:EB=FB:AB$ なので

$1:x=(x-1):1$ より $x^2-x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x>0$より $BE=x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ …… [答]

またAからBEに垂線AHを下ろす。

HはBEの中点より $BH=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\angle ABE=36^\circ$なのでこれをαとすると $\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$である。

(2) 図IIのように記号を設定すると、題意の図形は点F_1〜F_{10}を結んで囲まれた十角形になる。

正五角形を回転しているので$\triangle AOB$で考えて

AB上のF_1F_2の長さをaとすると $l_\theta=10a$ となる。

$\angle BAO=\angle B'A'O=54^\circ$より

4点A, A', F_2, Oは同一円周上にあるので

$\angle AF_2A'=\theta$

$\angle A'F_1F_2=180^\circ-108^\circ-\theta=72^\circ-\theta=2\alpha-\theta$ より

((1)のαを用いた)

$\triangle A'F_1F_2$で正弦定理より

$$\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{A'F_1}{\sin\theta}=\frac{A'F_2}{\sin(2\alpha-\theta)}$$

$$A'F_1=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}\times\sin\theta=\frac{a\sin\theta}{\sin2\alpha}$$

$$A'F_2=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}\times\sin(2\alpha-\theta)=\frac{a\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}$$

$AB=AF_1+F_1F_2+F_2B=A'F_1+F_1F_2+F_2A'$ より

$$1=\frac{a\sin\theta}{\sin2\alpha}+a+\frac{a\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}=a\cdot\frac{\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}$$

$l_\theta=10a$が最小 $\Longleftrightarrow$ $\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)$が最大 なので

$$\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)=\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)$$

$0^\circ<\theta<72^\circ=2\alpha$ より $\theta=\alpha$ で最大なので

l_θの最小値は $10\cdot\dfrac{\sin2\alpha}{\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\alpha)}$

$$=10\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=10\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=10\cdot\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

$=2\sqrt{5}$ より成立 [証明終]