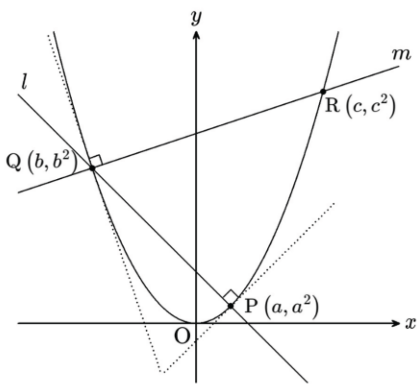
第　1　問

(1)　$\mathrm{Q}\left(b, b^2\right)$ とおく．$y=x^2$ において，$y'=2x$ より，$\mathrm{P}\left(a, a^2\right)$ における法線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$$
$$y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$



$C: y=x^2$ と連立して，

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$
$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

この 2 解が a, b であるから，

$$b=-a-\frac{1}{2a}$$

よって，求める Q の x 座標は，

$$\boldsymbol{-a-\frac{1}{2a}}$$ …（答）

(2)　$\mathrm{R}\left(c, c^2\right)$ とおくと，(1) と同様にして，

$$c=-b-\frac{1}{2b}$$

より，この最小値を求めればよい．まず，$a>0$ より，相加相乗平均の不等式から，

$$b=-\left(a+\frac{1}{2a}\right) \leqq -2\sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}}=-\sqrt{2}$$

等号は, $a=\dfrac{1}{2a}$ より, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　($a>0$ より）のときに成立.　…①

次に，$c=-b-\dfrac{1}{2b}$ $(b \leqq -\sqrt{2})$ の最小値を求める．$-b=B$ とおくと，$b \leqq -\sqrt{2}$ より，$B \geqq \sqrt{2}$ であり，

$$c=(-b)+\frac{1}{2(-b)}=B+\frac{1}{2B}$$

これを $f(B)$ とおくと，

$$f(B)=(\sqrt{B})^2-2 \cdot \sqrt{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2B}}\right)^2+2 \cdot \sqrt{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2B}}=\left(\sqrt{B}-\frac{1}{\sqrt{2B}}\right)^2+\sqrt{2}$$

より，$f(B)$ は $B \geqq \sqrt{2}$ において単調増加だから，

$$f(B) \geqq f(\sqrt{2})=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$B=\sqrt{2}$ のとき，$b=-\sqrt{2}$ ，このとき，①より $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．よって，求める最小値は，

$$\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$$ …（答）

【(2) の参考】

b は $b \leqq -\sqrt{2}$ のすべての値をとり得るので，c の値域を，

$$\begin{cases} c=-b-\dfrac{1}{2b} & \cdots ② \\ b \leqq -\sqrt{2} \end{cases}$$

をともに満たす実数 b が存在するような c の条件として求めることも可能．②より，

$$2b^2+2cb+1=0 \quad \cdots ②'$$

であるから，

「b の方程式②$'$が $b \leqq -\sqrt{2}$ に少なくとも 1 つ解をもつ」

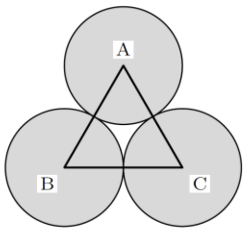
条件を考えることになる．

第 2 問

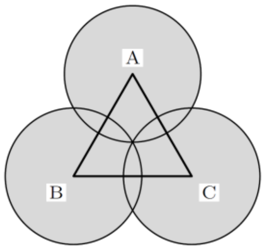
X ： 辺 AB，BC，CA がすべて D_r に含まれる中で r が最小となる状態，
Y ： 三角形 ABC が D_r に含まれる中で r が最小となる状態
とする．

(1) $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき．

(図 1)



(図 2)



X となるのは左の (図 1) のようになるときであり，s は辺 AB の長さの $\dfrac{1}{2}$ となるときであるから，

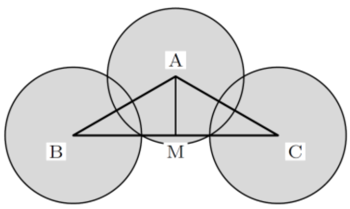
$$s = \frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

Y となるのは左の (図 2) のようになるときであり，t は正三角形 ABC の外接円の半径に等しいときであるから，

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

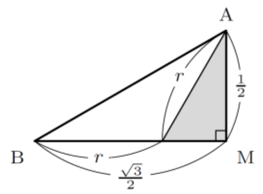
(2) $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき．

(図 3)



BC の中点を M とする．

X，Y となるのはともに左の (図 3) のようになるときである．



上の図において，三平方の定理より，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - r\right)^2 = r^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

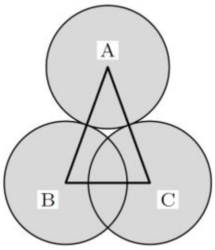
$$s = t = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問 (つづき 1)

(3) s について．

(ア) $\mathrm{AB} \geqq \mathrm{BC}$，すなわち，$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき．

(図 4)

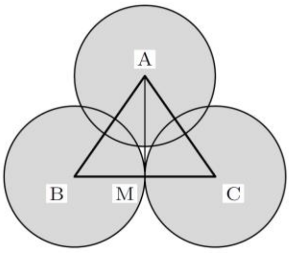


このとき，X となるのは左の (図 4) のようになるときであり，s は辺 AB の長さの $\dfrac{1}{2}$ となるときであるから，

$$s = \frac{1}{2}.$$

(イ) $\mathrm{AB} < \mathrm{BC}$，かつ，$\mathrm{AM} > \mathrm{BM}$ のとき，すなわち，$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき．

(図 5)



このとき，X となるのは左の (図 5) のようになるときであり，s は線分 BM の長さとなればよい．

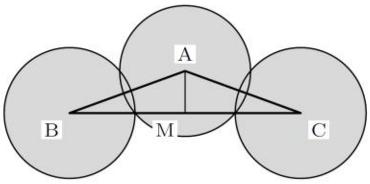
$$\mathrm{BM} = \mathrm{AB}\sin\frac{\theta}{2}$$

より，

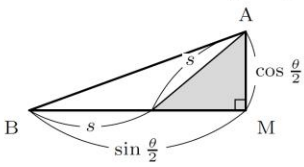
$$s = \sin\frac{\theta}{2}.$$

(ウ) $\mathrm{AB} < \mathrm{BC}$，かつ，$\mathrm{AM} \leqq \mathrm{BM}$ のとき，すなわち，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のとき．

(図 6)



このとき，X となるのは左の (図 6) のようになるときである．



上の図において，三平方の定理より，

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\theta}{2} - s\right)^2 = s^2.$$

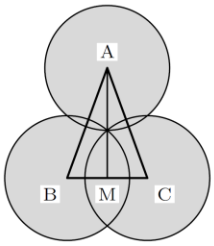
$$s = \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

第 2 問 (つづき 2)

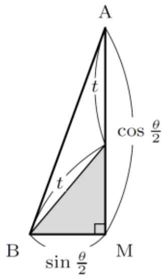
t について.

(エ) 三角形 ABC の外心が三角形の内部にある，すなわち，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき.

(図 7)



このとき，Y となるのは左の (図 7) のようになるときである.



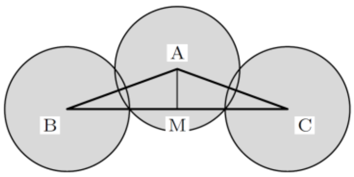
上の図において，三平方の定理より，

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\theta}{2}-t\right)^2=t^2.$$

$$t=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

(オ) 三角形 ABC の外心が三角形の周および外部にある，すなわち，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ のとき.

(図 6)



このとき，Y となるのは，(ウ) における X と同じく，左の (図 6) のようになるときである.

よって，

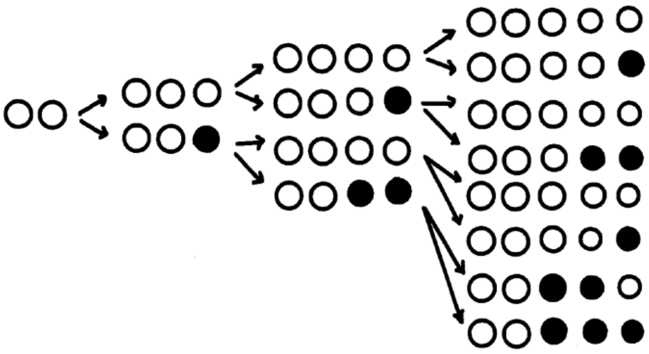
$$t=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

以上から，

$$s=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right),\\ \sin\dfrac{\theta}{2} & \left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi\right),\end{cases}\qquad t=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} & \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi\right).\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

第3問

(1)



樹形図より，$\dfrac{5}{8}$　　・・・(答)

(2)(3)

n 回後の右端の玉が○○，○●，●○，●●となる確率を各々 a_n, b_n, c_n, d_n とおくと，

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \quad \cdots ①$$

また条件より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots ② \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n & \cdots ③ \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n & \cdots ④ \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n & \cdots ⑤ \end{cases}$$

②−⑤より $a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - d_n)$

よって $a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - d_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots ②'$

$\left(a_1 = \frac{1}{2},\ d_1 = 0 \text{ より}\right)$

②＋⑤より $a_{n+1} + d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + d_n) + (b_n + c_n)$

①より $b_n + c_n = 1 - (a_n + d_n)$ であるからこれを代入して

$$a_{n+1} + d_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n + d_n) + 1$$

$$a_{n+1} + d_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + d_n - \frac{2}{3}\right)$$

よって，$a_n + d_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 + d_1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

つまり $a_n + d_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots ⑤'$

$(②' + ⑤') \div 2$ より $a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdots (*) \cdots$ (3)の答

また $n \geqq 2$ のとき $a_n + b_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$ $(\because ③)$

$(*)$ を代入して $a_n + b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n = 1$ のときも成り立つので

$a_n + b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ・・・ (2)の答

第3問（つづき）

（注1）（＊）を n の偶奇で分けて表すと

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n:\text{偶数})\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

（注2）漸化式の扱い方は様々ある．1つの例は以下．

②＋④ より，

$$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n+d_n)=\frac{1}{2}. \qquad (\text{① より})$$

よって，$a_n+c_n=\frac{1}{2}$ $(n\geqq 2)$ であり，$a_1=\frac{1}{2}$, $c_1=0$ より $a_n+c_n=\frac{1}{2}$ $(n\geqq 1)$．

したがって，$c_n=\frac{1}{2}-a_n$ として ②＋③ に代入すると，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a_n\right)=\frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{1}{4}.$$

(2)の 求める確率は，a_n+b_n であり，これを x_n とおくと，

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{4}.$$

これを解くと，

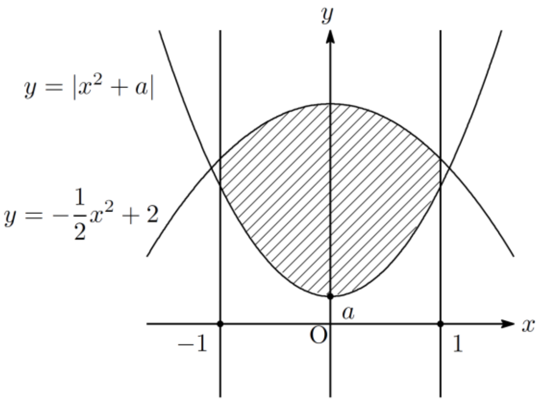
$$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\ (2)\text{の答}$$

第４問

まず，$0 \leqq a < 2$ のときを考えると，

$$y \geqq |x^2 + a| = x^2 + a$$

であるから，連立不等式が表す領域は次の斜線部分（境界含む）のようになる．

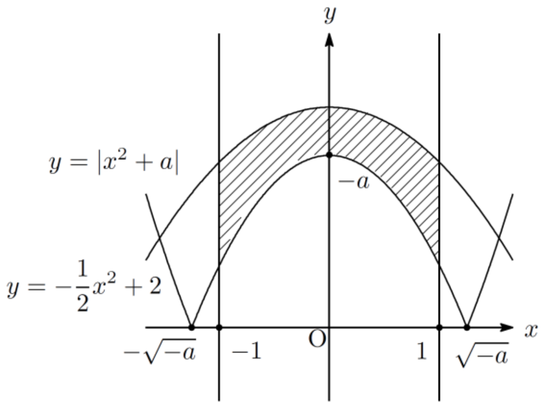


a の値が増加するにともない，放物線 $y = x^2 + a$ は y 軸正の方向に平行移動するので，この領域の面積は単調減少する．すなわち，$0 \leqq a < 2$ のとき $S(a) \leqq S(0)$ が成り立つので，$S(a)$ は $-2 \leqq a \leqq 0$ の範囲において最大値をとる．

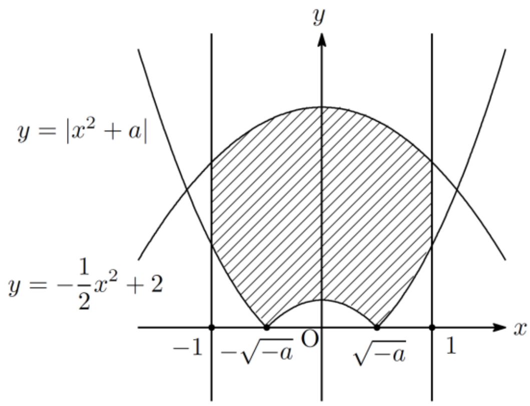
次に，$-2 \leqq a \leqq 0$ のときを考えると，

$$y \geqq |x^2 + a| = \begin{cases} x^2 + a & (x \leqq -\sqrt{-a},\ \sqrt{-a} \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 + a) & (-\sqrt{-a} \leqq x \leqq \sqrt{-a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，$\sqrt{-a}$ と 1 の大小に応じて，連立不等式が表す領域は次の斜線部分（境界含む）のようになる．



$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき



$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき

よって，$-2 \leqq a \leqq -1$ のときは，a の値が増加するにともない，放物線 $y = -(x^2 + a)$ は y 軸負の方向に平行移動するので，この領域の面積は単調増加する．すなわち，$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき $S(a) \leqq S(-1)$ が成り立つので，$S(a)$ は $-1 \leqq a \leqq 0$ の範囲において最大値をとる．

第４問　（つづき）

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$t = \sqrt{-a}$ とおくと

$$a = -t^2, \quad 0 \leqq t \leqq 1 \qquad \cdots①$$

であり，図より

$$\begin{aligned}
S(a) &= 2\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx - 2\int_0^{\sqrt{-a}} \{-(x^2+a)\}\, dx - 2\int_{\sqrt{-a}}^1 (x^2+a)\, dx \\
&= 2\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx + 2\int_0^t (x^2 - t^2)\, dx - 2\int_t^1 (x^2 - t^2)\, dx \quad (①より) \\
&= 2\left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{3}x^3 - t^2 x\right]_0^t - 2\left[\frac{1}{3}x^3 - t^2 x\right]_t^1 \\
&= -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3 \qquad \cdots②
\end{aligned}$$

となる．ゆえに①，②より，求める最大値は，t の関数

$$f(t) = -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

の最大値に等しい．

$f(t)$ を微分すると，

$$f'(t) = -8t^2 + 4t = 4t(1-2t)$$

となるので，$0 \leqq t \leqq 1$ における増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

表より，求める最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{6} \qquad \cdots(答)$$

である．