

1

(1)

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{11}C_2} = \frac{3}{55}$$

(2) $2^x = X$ とおくと,

$$\begin{aligned} & 4^x + 2^{x+1} - 8 - 16 \cdot 2^{-x} \\ &= (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 - \frac{16}{2^x} \\ &= \frac{X^3 + 2X^2 - 8X - 16}{X} \\ &= \frac{(X+2)(X^2-8)}{X} \end{aligned}$$

したがって, $4^x + 2^{x+1} - 8 - 16 \cdot 2^{-x} = 0$ のとき,

$$\frac{(X+2)(X^2-8)}{X} = 0.$$

このとき, $X = 2^x > 0$ より,

$$X = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$$

であるから,

$$x = \frac{3}{2}$$

$$(3) \frac{3x^2 - 2x + 4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \text{ と}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A+C)x + A-B+C}{(x+1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} A+B=3, \\ -2A+C=-2, \\ A-B+C=4. \end{cases}$$

これより,

$$A = \frac{9}{4}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{5}{2}$$

(4) $w = i(2z+3)$ より,

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{i} - 3 \right).$$

これと $|z|=1$ より,

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{w}{i} - 3 \right) \right| = 1.$$

$$\frac{|w-3i|}{|i|} = 2.$$

$$|w-3i| = 2.$$

したがって, 点 w は点 $3i$ を中心とする半径

2 の円を描く.

2

(1) 第 m 群は

$$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \dots, \frac{m}{m+1}$$

の m 項からなり、第 m 群の最後の項は

$$1+2+\dots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$$

より、第 $\frac{1}{2}m(m+1)$ 項である。

$15 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$ より、第 15 項は第 5 群の最後の項で

ある。ゆえに第 15 項は $\boxed{\frac{5}{6}}$ 。

また、 $\frac{7}{26}$ は第 25 群の 7 番目の項である。

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 + 7 = 300 + 7 = 307$$

であるので、 $\frac{7}{26}$ は第 $\boxed{307}$ 項である。

次に、第 6 群に属するすべての項

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$

の和 T_6 は、

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} \\ &= \frac{21}{7} = \boxed{3} \end{aligned}$$

第 m 群に属するすべての項の和 T_m は、

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+1} + \dots + \frac{m}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} (1+2+\dots+m) \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2}m(m+1) \\ &= \boxed{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1)より、初項から第 m 群の最後の項までのすべての項の和 S_m は、

$$\begin{aligned} S_m &= T_1 + T_2 + \dots + T_m \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{m}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1+2+\dots+m) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m(m+1) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}m(m+1)} \end{aligned}$$

(3) 数列の項はすべて正であることに注意。(2)より、

$$S_{89} = \frac{1}{4} \cdot 89 \cdot 90 = 2002 + \frac{1}{2} < 2025,$$

$$S_{90} = \frac{1}{4} \cdot 90 \cdot 91 = 2047 + \frac{1}{2} > 2025.$$

ゆえに初項から第 n 項までの数列の和が初めて 2025 をこえるのは、第 n 項が第 $\boxed{90}$ 群に属するときである。

(4) 第 7 群は

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$

からなり、値が $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ 以下となる項の和 U_7 は、

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

以下、第 m 群のうち値が $\frac{1}{2}$ 以下の項の和 U_m に

ついて、 $U_m < 3$ となる自然数 m を m の偶奇により場合分けすることで求める。

(i) m が奇数であるとき、

$$m = 2l - 1 \quad (l: \text{自然数})$$

とおけて、第 $2l-1$ 群

$$\frac{1}{2l}, \frac{2}{2l}, \dots, \frac{2l-1}{2l}$$

のうち、値が $\frac{1}{2} = \frac{l}{2l}$ 以下となる項の和 U_{2l-1} は、

$$\begin{aligned} U_{2l-1} &= \frac{1}{2l} + \frac{2}{2l} + \dots + \frac{l}{2l} \\ &= \frac{1}{2l} (1+2+\dots+l) \\ &= \frac{1}{2l} \cdot \frac{1}{2}l(l+1) \\ &= \frac{1}{4}(l+1). \end{aligned}$$

$U_{2l-1} < 3$ を解くと、

$$\frac{1}{4}(l+1) < 3 \quad \text{したがって} \quad l < 11. \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①を満たす最大の自然数 l は 10 であるので、 $U_m < 3$ を満たす奇数 m の最大値は、

$$2 \cdot 10 - 1 = 19.$$

(ii) m が偶数であるとき、

$$m = 2l \quad (l: \text{自然数})$$

とおけて、第 $2l$ 群

2

$$\frac{1}{2l+1}, \frac{2}{2l+1}, \dots, \frac{2l}{2l+1}$$

のうち、値が $\frac{1}{2} = \frac{l+\frac{1}{2}}{2l+1}$ 以下となる項の和 U_{2l} は、

$$\begin{aligned} U_{2l} &= \frac{1}{2l+1} + \frac{2}{2l+1} + \dots + \frac{l}{2l+1} \\ &= \frac{1}{2l+1} (1+2+\dots+l) \\ &= \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{2} l(l+1) \\ &= \frac{l(l+1)}{2(2l+1)}. \end{aligned}$$

$U_{2l} < 3$ を解くと、

$$\frac{l(l+1)}{2(2l+1)} < 3.$$

$$l(l+1) < 6(2l+1).$$

$$l(l-11) < 6. \quad \dots\dots ②$$

$l = 11$ のとき、

$$l(l-11) = 0 \cdot 11 < 6.$$

したがって、不等式②は成り立つ。

また $l \geq 12$ のとき、

$$l(l-11) \geq 12 \cdot 1 > 6$$

したがって、不等式②は成り立たない。

以上から、②を満たす最大の自然数 l は 11 である

ので、 $U_m < 3$ を満たす偶数 m の最大値は、

$$2 \cdot 11 = 22.$$

ゆえに $U_m < 3$ となる自然数 m の最大値は、

$$\boxed{22}$$

3

(1)

$$f_2(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \boxed{2} \cos x,$$

$$f_3(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} \\ = 3 - 4 \sin^2 x = \boxed{4} \cos^2 x - 1,$$

$$f_4(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x} \\ = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x} = 4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) \\ = \boxed{8} \cos^3 x - 4 \cos x.$$

(2)

$$\int f_3(x) dx = \int (4 \cos^2 x - 1) dx \\ = \int \left\{ 4 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) - 1 \right\} dx \\ = \int (2 \cos 2x + 1) dx \\ = \boxed{\sin 2x + x} + C. \quad (C \text{ は積分定数})$$

また, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f_3(x) = 0$ のとき,

$$4 \cos^2 x - 1 = 0. \\ \cos x = \frac{1}{2}.$$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

したがって, 曲線 C_3 と x 軸との交点の座標は,

$$\left(\boxed{\frac{\pi}{3}}, 0 \right).$$

ここで, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ において, $\frac{\pi}{2} \leq 3x \leq \pi$ より,

$$f_3(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} \geq 0.$$

よって, 曲線 C_3 , x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{6}$ で囲まれた部分の面積は,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f_3(x) dx = \left[\sin 2x + x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

(3)

$$\int f_4(x) dx = \int (8 \cos^3 x - 4 \cos x) dx \\ = \int \{ 8(1 - \sin^2 x) \cos x - 4 \cos x \} dx$$

$$= \int (-8 \sin^2 x \cos x + 4 \cos x) dx \\ = \boxed{-\frac{8}{3} \sin^3 x + 4 \sin x} + C'.$$

(C' は積分定数)

また, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f_4(x) = 0$ のとき,

$$4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0. \\ \cos x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}.$$

したがって, 曲線 C_4 と x 軸との交点の座標は,

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0 \right), \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right).$$

ここで, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\pi \leq 4x \leq 2\pi$ より,

$$f_4(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x} \leq 0.$$

よって, 曲線 C_4 と x 軸で囲まれた部分の面積は,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-f_4(x)) dx = - \left[-\frac{8}{3} \sin^3 x + 4 \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \boxed{\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)}.$$

4

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4 \text{ であり, } AB = 5 \text{ から,} \\
 & |\vec{AB}|^2 = 5^2. \\
 & |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 25. \\
 & |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 25. \\
 & 16 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 25. \\
 & \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}. \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

D は辺 AB を 1:3 に内分する点であるので,

$$\vec{OD} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}).$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 |\vec{OD}|^2 &= \frac{1}{4^2} |3\vec{a} + \vec{b}|^2 \\
 &= \frac{1}{16} (9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\
 &= \frac{1}{16} \left\{ 9 \cdot 4 + 6 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 16 \right\} \\
 &= \frac{37}{16}.
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } OD = \frac{\sqrt{37}}{4}. \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) H は直線 OD 上にあるので, k を実数として,

$$\vec{OH} = k\vec{OD}.$$

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = k\vec{OD} - \vec{a}.$$

$\vec{AH} \perp \vec{OD}$ より, $\vec{AH} \cdot \vec{OD} = 0$. したがって,

$$(k\vec{OD} - \vec{a}) \cdot \vec{OD} = 0.$$

$$k|\vec{OD}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{OD} = 0.$$

$$(1) \text{より } |\vec{OD}|^2 = \frac{37}{16} \text{ および}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{OD} &= \frac{1}{4} \vec{a} \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \frac{1}{4} (3|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}) \\
 &= \frac{1}{4} \left(3 \cdot 4 - \frac{5}{2} \right) = \frac{19}{8},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot \vec{OD} &= \frac{1}{4} \vec{b} \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \frac{1}{4} (3\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 16 \right\} = \frac{17}{8}.
 \end{aligned}$$

であることに注意. したがって,

$$\frac{37}{16}k - \frac{19}{8} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{38}{37}.$$

以上から,

$$\begin{aligned}
 \vec{OH} &= \frac{38}{37} \cdot \frac{1}{4} (3\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \frac{57}{74} \vec{a} + \frac{19}{74} \vec{b}. \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $\vec{OP} = t\vec{OD}$ であるので,

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = t\vec{OD} - \vec{a}.$$

つまり,

$$\begin{aligned}
 \vec{AP} &= t \cdot \frac{1}{4} (3\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \\
 &= \frac{1}{4} (3t - 4) \vec{a} + \frac{1}{4} t \vec{b}. \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = t\vec{OD} - \vec{b}.$$

であるので,

$$\begin{aligned}
 &\vec{AP} \cdot \vec{BP} \\
 &= (t\vec{OD} - \vec{a}) \cdot (t\vec{OD} - \vec{b}) \\
 &= |\vec{OD}|^2 t^2 - (\vec{a} \cdot \vec{OD} + \vec{b} \cdot \vec{OD})t + \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= \frac{37}{16} t^2 - \left(\frac{19}{8} + \frac{17}{8} \right) t - \frac{5}{2} \\
 &= \frac{37}{16} \left(t^2 - \frac{72}{37} t \right) - \frac{5}{2} \\
 &= \frac{37}{16} \left(t - \frac{36}{37} \right)^2 - \frac{347}{74}.
 \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ において $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ が最小となるのは,

$$t = \frac{36}{37}. \quad \dots\dots(\text{答})$$

のときである. このとき,

$$\begin{aligned}
 \vec{PH} &= \vec{OH} - \vec{OP} \\
 &= \frac{38}{37} \vec{OD} - \frac{36}{37} \vec{OD} \\
 &= \frac{2}{37} \vec{OD}.
 \end{aligned}$$

(1)より,

$$\begin{aligned}
 PH &= |\vec{PH}| = \frac{2}{37} |\vec{OD}| \\
 &= \frac{2}{37} \cdot \frac{\sqrt{37}}{4} = \frac{\sqrt{37}}{74}. \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$