

1

(a)

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{\boxed{1} \boxed{5}}{\boxed{2}} \quad \dots (1), (2), (3)(\text{答})\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}AB^2 &= (5 \cos \alpha - 5)^2 + (5 \sin \alpha)^2 \\ &= 50 - 50 \cos \alpha \\ &= 50 - 50 \cdot \frac{4}{5} \\ &= 10\end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{\boxed{1} \boxed{0}} \quad \dots (4), (5)(\text{答})$$

(b)

$$\begin{aligned}\triangle OBC &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sin 2\alpha \\ &= \frac{25}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{25}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \boxed{1} \boxed{2} \quad \dots (6), (7)(\text{答})\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}BC^2 &= (5 \cos 3\alpha - 5 \cos \alpha)^2 + (5 \sin 3\alpha - 5 \sin \alpha)^2 \\ &= 50 - 50(\cos 3\alpha \cos \alpha + \sin 3\alpha \sin \alpha) \\ &= 50 - 50 \cos 2\alpha \\ &= 100 \sin^2 \alpha \\ &= 100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 36\end{aligned}$$

$$BC = \boxed{6} \quad \dots (8)(\text{答})$$

1(つづき)

(c)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AC}^2 &= (5 \cos 3\alpha - 5)^2 + (5 \sin 3\alpha)^2 \\
 &= 50 - 50 \cos 3\alpha \\
 &= 50(1 - \cos 3\alpha) \\
 &= 50(1 - 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha) \\
 &= 50\left\{1 - 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 3 \cdot \frac{4}{5}\right\} \\
 &= 50 \cdot \frac{169}{125} \\
 &= 10 \cdot \frac{169}{25}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{AC} = \frac{\boxed{1}\boxed{3}}{\boxed{5}} \sqrt{\boxed{1}\boxed{0}} \quad \dots (9) \sim (13) (\text{答})$$

[1](2)

$$|m+n-6|+|m-n-2|\leq 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$(m+n-6)(m-n-2)\geq 0$ のとき, ① より

$$(m+n-6)+(m-n-2)\leq 6 \text{ かつ } -(m+n-6)-(m-n-2)\leq 6$$

$$\boxed{1}\leq m\leq \boxed{7} \quad \dots (14), (15)(\text{答})$$

$(m+n-6)(m-n-2)\leq 0$ のとき, ① より

$$(m+n-6)-(m-n-2)\leq 6 \text{ かつ } -(m+n-6)+(m-n-2)\leq 6$$

$$\boxed{-1}\leq n\leq \boxed{5} \quad \dots (16), (17), (18)(\text{答})$$

よって

$$\begin{aligned} (m-n)(m+n-6) &= m^2 - 6m - n^2 + 6n \\ &= (m-\boxed{3})^2 - (n-\boxed{3})^2 \quad \dots (19), (20)(\text{答}) \end{aligned}$$

上式は $m=7, n=3$ のときに最大となり, 最大値は

$$(7-3)^2 - (3-3)^2 = \boxed{16} \quad \dots (21), (22)(\text{答})$$

(2)

(1) $T_1 = (1 - \frac{1}{2})^2$ より、

$$\sum_{k=1}^1 \frac{2}{3^k} \cdot \frac{(k+2)!}{(k-1)!} a_k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } a_1 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{16}}$$

... (23) ~ (25) (答)

同様12、 $T_2 = (2 - \frac{1}{2})^2$ より、

$$\sum_{k=1}^2 \frac{2}{3^k} \cdot \frac{(k+2)!}{(k-1)!} a_k = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{9} \cdot \frac{24}{1} a_2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{よって } a_2 = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$$

... (26), (27) (答)

(2) $n \geq 2$ に対して、

$$T_n - T_{n-1} = (n - \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{3}{2})^2$$

$$= (2n-2) \cdot 1$$

$$= \boxed{2}n - \boxed{2}$$

... (28), (29) (答)

$$\text{よって } \frac{2}{3^n} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \cdot a_n = 2n-2$$

$$a_n = 2(n-1) \cdot \frac{3^n}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)n}$$

$$a_n = 3^n \cdot \frac{n - \boxed{1}}{n(n+1)(n+2)}$$

... (30) (答)

よって、 $r = \boxed{3}$, $s = \boxed{0}$, $t = \boxed{1}$, $u = \boxed{2}$... (31) ~ (34) (答)

(2) (つづき)

(3) $k \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} a_k &= 3^k \cdot \frac{(k+2) - 3k}{k(k+1)(k+2)} \cdot \frac{1}{-2} \\ &= -\frac{3^k}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3^{k+1}}{(k+1)(k+2)} - \frac{3^k}{(k+1)(k+1)} \right\} \\ &\quad \dots (35) \sim (37) \text{ (答)} \end{aligned}$$

ここで $b_k = \frac{3^k}{k(k+1)}$ ($k \geq 2$) とおくと,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (b_{k+1} - b_k) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} (b_{n+1} - b_2) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{3^2}{2 \cdot 3} \right\} \\ &= -\frac{\boxed{11}}{\boxed{16}} + \frac{3^{n+1}}{2(n+1)(n+2)} \quad \dots (38) \sim (42) \text{ (答)} \end{aligned}$$

こゝより, $p = \boxed{1}$, $q = \boxed{2}$ $\dots (43), (44) \text{ (答)}$

[3] この試行を 1 回行い、

(A) が起こる確率は $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

(B) が起こる確率は $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

(C) が起こる確率は $\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$

である。

- (1) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、
3 回目の試行後に原点にあるのは、
(A), (B), (C) がそれぞれ 1 回ずつ
起こる場合であるから、求める確率は

$$3! \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{16}}$$

… (45), (46), (47) (答)

- (2) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、3 回目の試行後に y 軸上にあるのは、

(A) または (B) が 2 回、(C) が 1 回起こる場合であるから、求める確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)^2 \frac{1}{2} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$$

… (48), (49) (答)

- (3) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、5 回目の試行後に x 軸上にあるのは、

次の 3 つの場合である。

(i) (C) が 5 回起こる

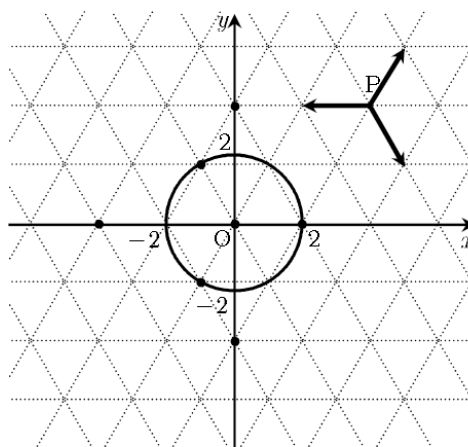
(ii) (A) が 1 回、(B) が 1 回、(C) が 3 回起こる

(iii) (A) が 2 回、(B) が 2 回、(C) が 1 回起こる

よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{5!}{3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{5!}{2!2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} = \frac{\boxed{6}\boxed{3}}{\boxed{2}\boxed{5}\boxed{6}}$$

… (50) ~ (54) (答)



[3] (つづき)

(4) 1 回目の試行前に原点にある点 P が,

5 回目の試行後に x 軸上にあるという事象を E ,

8 回目の試行後に円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にあるという事象を F

とする。

(3) から, 事象 E が起こる確率 $P(E)$ は $P(E) = \frac{63}{256}$

積事象 $E \cap F$ が起こるのは, 次の 2 つの場合である。

(i) 最初の 5 回で, (A) が 1 回, (B) が 1 回, (C) が 3 回起こり,

その後, 「(A) が 2 回, (B) が 1 回」または「(A) が 1 回, (B) が 2 回」起こる

(ii) 最初の 5 回で, (A) が 2 回, (B) が 2 回, (C) が 1 回起こり,

その後, 「(A), (B), (C) が各 1 回」または「(A) または (B) が 1 回, (C) が 2 回」起こる

よって, $E \cap F$ が起こる確率 $P(E \cap F)$ は

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= \frac{5!}{3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 \cdot {}_3C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{5!}{2!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2} \times \left\{ 3! \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + {}_3C_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{195}{2^{12}} \end{aligned}$$

したがって, 1 回目の試行前に原点にある点 P が, 5 回目の試行後に x 軸上にあるとき,

8 回目の試行後に円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある条件付き確率 $P_E(F)$ は

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{195}{2^{12}} \div \frac{63}{256} = \frac{\boxed{6}\boxed{5}}{\boxed{3}\boxed{3}\boxed{6}} \quad \cdots (55) \sim (59) \text{ (答)}$$

[4]

(1) $y = -x^2$... ① より $y' = -2x$ であるから, 接点 $(-p, -p^2)$ における ① の接線の方程式は

$$y = 2p(x + p) - p^2$$

すなわち

$$y = 2px + p^2 \quad \dots \text{②}$$

② で $y = 2m$ として

$$2px + p^2 = 2m$$

$$x = \frac{2m - p^2}{2p} \quad \dots \text{(答)}$$

(2) $\frac{2m - p^2}{2p} \leq 1$ より

$$2m - p^2 \leq 2p$$

$$m \leq \frac{1}{2}(p^2 + 2p)$$

であるから, $N = \left\lceil \frac{1}{2}(p^2 + 2p) \right\rceil$.

$N = 40$ より

$$40 \leq \frac{1}{2}(p^2 + 2p) < 41$$

$$p^2 + 2p - 80 \geq 0 \text{ かつ } p^2 + 2p - 82 < 0$$

これと $p > 0$ より

$$8 \leq p < -1 + \sqrt{83} \quad \dots \text{(答)}$$

(3)

$$a = 3n \log_3 6 - \log_3 2 + n$$

$$= \log_3 \frac{6^{3n} \cdot 3^n}{2}$$

$$= \log_3 3^{4n} \cdot 2^{3n-1}$$

よって

$$3^a = 3^{4n} \cdot 2^{3n-1} \quad \dots \text{(答)}$$

[4] (つづき)

(4) $p = 3^n$ より

$$p = 3^{4n} \cdot 2^{3n-1}$$

この p は偶数であるから $N = \left\lceil \frac{1}{2}(p^2 + 2p) \right\rceil = \frac{1}{2}p^2 + p$.

$\frac{1}{2}p^2 < N < 2^{1000}$ より

$$p^2 < 2^{1001}$$

$$3^{8n} \cdot 2^{6n-2} < 2^{1001}$$

$$\log_2 3^{8n} \cdot 2^{6n-2} < 1001$$

$$8n \log_2 3 + 6n - 2 < 1001$$

$$n < \frac{1003}{8 \log_2 3 + 6} < \frac{1003}{8 \cdot 1.58 + 6} = 53.80 \dots$$

よって, $n \leq 53$ が必要.

次に, $n = 53$ のとき, $p = 3^{212} \cdot 2^{158}$ であり

$$\frac{1}{2}p^2 = 3^{424} \cdot 2^{315}$$

$$\log_2 \frac{1}{2}p^2 < 424 \log_2 3 + 315 < 424 \cdot 1.59 + 315 < 990$$

$$\frac{1}{2}p^2 < 2^{990}$$

また

$$\log_2 p = 212 \log_2 3 + 158 < 212 \cdot 1.59 + 158 < 496$$

$$p < 2^{496}$$

であるから

$$N = \frac{1}{2}p^2 + p < 2^{990} + 2^{496} < 2^{1000}$$

すなわち, $n = 53$ のとき確かに $N < 2^{1000}$ を満たす.

求める n の最大値は

53

…(答)

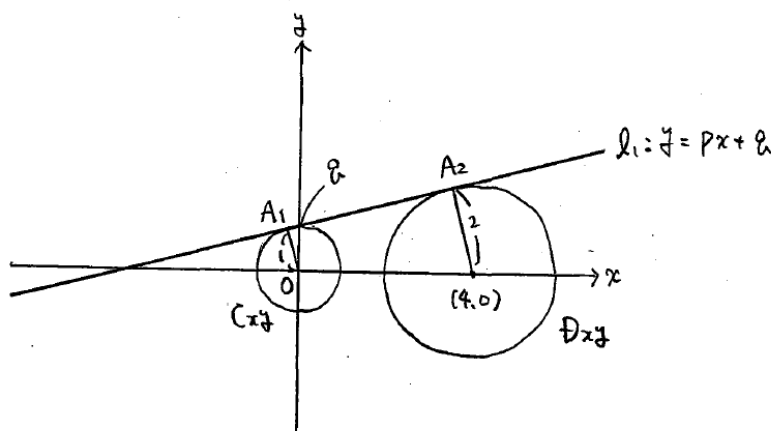
[5]

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ D: (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- (1) 球面 C と xy 平面が交わってできる円を C_{xy} , 球面 D と xy 平面が交わってできる円を D_{xy} とすると, これらの方程式は

$$\begin{cases} C_{xy}: x^2 + y^2 = 1 \\ D_{xy}: (x-4)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

xy 平面上におけるこの2つの円の共通接線 $l_1: y = px + q$ で, 傾き p が $0 < p < 1$ を満たすものを求める。



C_{xy} は中心が $(0, 0)$ で半径が 1 の円, D_{xy} は中心が $(4, 0)$ で半径 2 の円であるから, $l_1: px - y + q = 0$ がこの2円に接する条件は,

$$\begin{cases} \frac{|q|}{\sqrt{p^2 + 1}} = 1 \\ \frac{|4p + q|}{\sqrt{p^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

$0 < p < 1$ であり, また図から $q > 0$ であるから,

$$\begin{cases} \frac{q}{\sqrt{p^2 + 1}} = 1 \\ \frac{4p + q}{\sqrt{p^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

$\sqrt{p^2 + 1}$ を消去すると $q = 4p$ を得る。よって, この連立方程式を解いて,

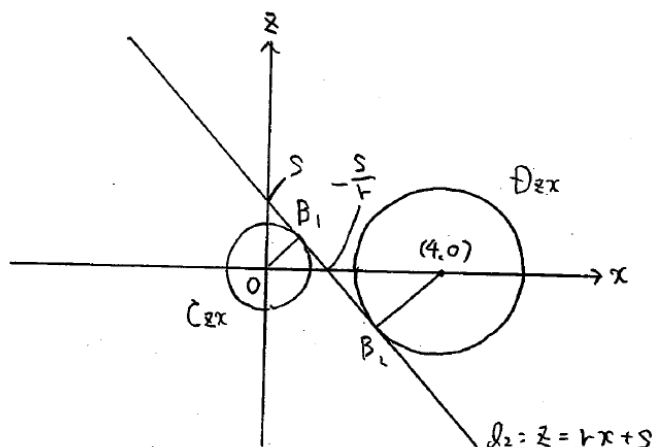
$$p = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad q = \frac{4}{\sqrt{15}} \quad \dots(\text{答})$$

[5] つづき 1

- (2) 球面 C と zx 平面が交わってできる円を C_{zx} , 球面 D と zx 平面が交わってできる円を D_{zx} とすると, これらの方程式は

$$\begin{cases} C_{zx}: x^2 + z^2 = 1 \\ D_{zx}: (x-4)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

zx 平面上におけるこの 2 つの円の共通接線 $l_2: z = rx + s$ で, 傾き r が $r < -1$ を満たすものを求める。



l_2 が 2 円に接する条件は, (1) と同様にして,

$$\begin{cases} \frac{|s|}{\sqrt{r^2 + 1}} = 1 \\ \frac{|4r + s|}{\sqrt{r^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

$r < -1$ であり, 図から $s > 0$ かつ $-\frac{s}{r} < 4 \iff 4r + s < 0$ であるから,

$$\begin{cases} \frac{s}{\sqrt{r^2 + 1}} = 1 \\ \frac{-(4r + s)}{\sqrt{r^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

$\sqrt{r^2 + 1}$ を消去すると $s = -\frac{4}{3}r$ を得る。よって, この連立方程式を解いて,

$$r = -\frac{3}{\sqrt{7}}, \quad s = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \dots (\text{答})$$

【(1) と (2) の補足】

(1) と (2) において 2 円の共通接線は 4 本あり, 上記の解答では求める共通接線が一意であるとして計算している。なお, (1) と (2) の計算と 2 円が x 軸対称であることから, 4 本の共通接線の傾きは,

$$\pm \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$$

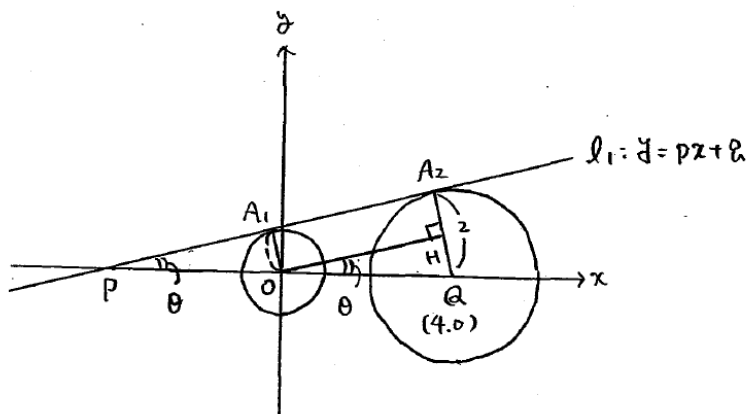
である。よって, 実際に, 傾き p が $0 < p < 1$ である共通接線と, 傾き r が $r < -1$ である共通接線は, ともに一意である。

[5] つづき 2

【(1) と (2) の別解】

2 円の共通接線は、図形的に求めることもできる。

- (1) l_1 と x 軸との交点を P とし、円 D_{xy} の中心を Q とする。また、 O から線分 A_2Q に垂線 OH を下ろす。
さらに、 $\angle QPA_2 = \theta$ とおく。



$\triangle QOH$ と $\triangle QPA_2$ は相似であり、相似比は $1:2$ から、 $OP = 4$ より $P(-4, 0)$ である。
また、 $\angle QOH = \angle QPA_2 = \theta$ であり、 $OQ = 4$, $DH = 1$ より、 $OH = \sqrt{15}$ であるから、

$$\tan \theta = \frac{HQ}{OH} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

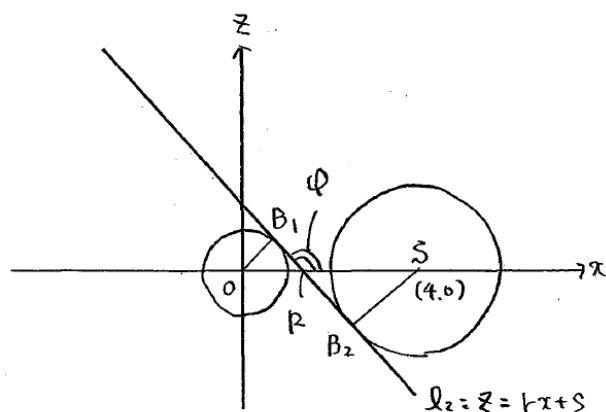
よって、 l_1 の方程式は

$$y = (\tan \theta)(x + 4) \quad \text{つまり} \quad y = \frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{4}{\sqrt{15}}$$

ゆえに、

$$p = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad q = \frac{4}{\sqrt{15}} \quad \dots (\text{答})$$

- (2) l_2 と x 軸との交点を R とし、円 D_{zx} の中心を S とする。また、 $\angle SRB_1 = \varphi$ とおく。



[5] つづき 3

$\triangle ORB_1$ と $\triangle SRB_2$ は相似であり、相似比は $1:2$ から、 $OR = \frac{3}{4}$ より $R\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ である。

また、 $OR = \frac{4}{3}$ 、 $OB_1 = 1$ より、 $RB_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}$ であるから、

$$\tan(\pi - \varphi) = \frac{OB_1}{RB_1} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{つまり} \quad \tan \varphi = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

よって、 l_2 の方程式は

$$y = (\tan \varphi) \left(x - \frac{4}{3} \right) \quad \text{つまり} \quad y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x + \frac{4}{\sqrt{7}}$$

ゆえに、

$$r = -\frac{3}{\sqrt{7}}, \quad s = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \dots(\text{答})$$

(3) (1), (2) より、平面 α と β が交わってできる直線 ℓ の方程式は、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{4}{\sqrt{15}} \\ z = -\frac{3}{\sqrt{7}}x + \frac{4}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$z = 0$ とすると $x = \frac{4}{3}$ 、 $y = \frac{16}{3\sqrt{15}}$ であるから、 ℓ と xy 平面の交点 G の座標は

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{15}}, 0 \right) \quad \dots(\text{答})$$

(4) ℓ の方程式に $y = 0$ を代入することで、 ℓ と xz 平面の交点 H の座標は

$$\left(-4, 0, \frac{16}{\sqrt{7}} \right)$$

よって、

$$\overrightarrow{GH} = \left(-4, 0, \frac{16}{\sqrt{7}} \right) - \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{15}}, 0 \right) = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{16}{3\sqrt{15}}, \frac{16}{\sqrt{7}} \right)$$

$\vec{d} = -\frac{3}{16}\overrightarrow{GH} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{7}} \right)$ とおいて、 $-\frac{16}{3}t = u$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OG} + t\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OG} + u\vec{d} \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{15}}, 0 \right) + u \left(1, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{7}} \right) \\ &= \left(\frac{4}{3} + u, \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u, -\frac{3}{\sqrt{7}}u \right) \end{aligned}$$

[5] つづき 4

2点O, Mは x 軸上より, $\triangle OMT$ の面積が最小となる条件は, 直線 ℓ 上の点Tと x 軸上の点 $N(k, 0, 0)$ との距離が最小となるとき, つまり $\overrightarrow{NT} \perp \vec{d}$ かつ $\overrightarrow{NT} \perp \overrightarrow{OM}$ となることである。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{ON} = \left(\frac{4}{3} + u, \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u, -\frac{3}{\sqrt{7}}u \right) - (k, 0, 0) \\ &= \left(\frac{4}{3} + u - k, \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u, -\frac{3}{\sqrt{7}}u \right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{NT} \cdot \vec{d} = 0$ かつ $\overrightarrow{NT} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ より,

$$\begin{cases} \frac{4}{3} + u - k + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \left(\frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u \right) - \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}u \right) = 0 \\ \left(\frac{4}{3} + u - k \right) \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} \frac{4}{3} + u - k + \frac{16}{45} + \frac{1}{15}u + \frac{9}{7}u = 0 \\ \frac{4}{3} + u - k = 0 \end{cases}$$

これを解くと,

$$u = -\frac{56}{213}, \quad k = \frac{76}{71}$$

したがって, 求める値は,

$$t = -\frac{3}{16}u = \frac{7}{142} \quad \dots (\text{答})$$

【(4)の別解】

点Tから x 軸に垂線TIを下ろすと, $I\left(\frac{4}{3} + u, 0, 0\right)$ であるから,

$$\overrightarrow{IT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OI} = \left(0, \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u, -\frac{3}{\sqrt{7}}u \right)$$

2点O, Mは x 軸上より, $\triangle OMT$ の面積が最小となる条件は, $|\overrightarrow{IT}|$ が最小となることである。ここで,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{IT}|^2 &= \left(\frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u \right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}u \right)^2 \\ &= \frac{142}{105}u^2 + \frac{32}{45}u + \frac{256}{135}\end{aligned}$$

であり, $|\overrightarrow{IT}|^2$ が最小となるのは,

$$u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{32}{45} \cdot \frac{105}{142} = -\frac{56}{213}$$

このとき $|\overrightarrow{IT}|$ も最小となる。したがって, 求める値は,

$$t = -\frac{3}{16}u = \frac{7}{142} \quad \dots (\text{答})$$

〔6〕

(1) 直線ABの方程式は、

$$y = \frac{3b^2 - 3a^2}{b - a} (x - a) + 3a^2 \quad \text{より} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 3(b + a)x - 3ab$$

よって右図より、

$$S = \int_a^b \{3(b + a)x - 3ab - 3x^2\} dx$$

$$= -3 \int_a^b (x - a)(x - b) dx \quad \dots (*)$$

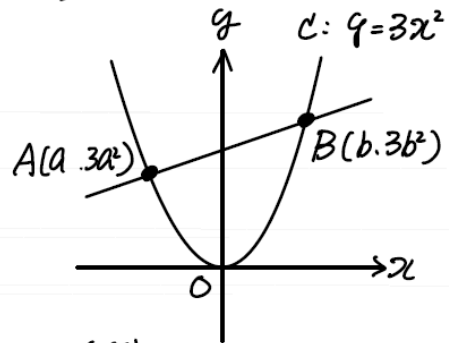
$$= -3 \int_a^b (x - a) \{(x - a) - (b - a)\} dx$$

$$= -3 \int_a^b \{(x - a)^2 - (b - a)(x - a)\} dx$$

$$= -3 \left[\frac{1}{3} (x - a)^3 - \frac{b - a}{2} (x - a)^2 \right]_a^b$$

$$= -3 \left\{ \frac{1}{3} (b - a)^3 - \frac{1}{2} (b - a)^3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (b - a)^3 \quad \dots (\text{答})$$

(補足) いわゆる $-\frac{1}{6}$ 公式を用いると、(*)以降は、

$$S = -3 \left\{ -\frac{1}{6} (b - a)^3 \right\} = \frac{1}{2} (b - a)^3,$$

問題文から使用してよいのかの判断が難しいため、補足とした。

(6) (つづき1)

(2) $AB=3$ より、 $(b-a)^2 + (3b^2 - 3a^2)^2 = 9$

よって $(b-a)^2 + 9(b+a)^2(b-a)^2 = 9 \quad \dots \textcircled{2}$

ここで $\begin{cases} b+a=p \\ b-a=q \end{cases}$ とおくと、 $a < b$ より $q > 0$ であり、

$\textcircled{2}$ より、 $q^2 + 9p^2q^2 = 9$ より、 $p^2 = \frac{9-q^2}{9q^2}$

$p^2 \geq 0$ より、 $9 - q^2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{3}$

$q > 0$ もふまえると、 $0 < q \leq 3$

よって、 $0 < (b-a)^3 \leq 27$ より

$$0 < S \leq \frac{27}{2}$$

この等号は $p=0, q=3$ 、つまり $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}$

のとき成立するので、 $T = \frac{27}{2} \quad \dots (\text{答})$

(3) 直線 AB が、点 $(0,7)$ を通ると仮定すると、

① から $7 = -3ab$ より $ab = -\frac{7}{3}$ となるが、

$$q^2 = (b-a)^2 = (a+b)^2 - 4ab = p^2 + \frac{28}{3} > 9 \text{ となり}$$

③ に矛盾する。

以上から背理法により、直線 AB は点 $(0,7)$ を通らない。

$\dots$ (証明終り)

(6) (つづき2)

(13)の別解)

直線ABが、点(0,7)を通ると仮定すると

$$7 = -3ab \quad \text{より} \quad a = -\frac{7}{3b}$$

これより $b - a = 9$ に代入して、

$$b + \frac{7}{3b} = 9$$

$$3b^2 - 39b + 7 = 0$$

$$b = \frac{39 \pm \sqrt{99^2 - 84}}{6}$$

ここで①より、 $0 < 9^2 \leq 9$ となるので、

$$-84 < 99^2 - 84 \leq -3$$

よって、 b は虚数となり、

点Bが xy 平面上にあることに矛盾する。

以上から有理数により、

直線ABは、点(0,7)を通らない。

... (証明終了)