

数学 I・数学 A

(全問必答)

第1問 (配点 20)

[1] $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, b = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ とすると

$$ab = \boxed{\alpha}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\boxed{\eta} + \sqrt{\boxed{\omega}}}{\boxed{\epsilon}}$$

である。このとき、方程式

$$|x - ab| = 2$$

を満たす x の値は

$$x = \boxed{\delta}, \boxed{\epsilon}$$

であり、不等式

$$\left| x - \frac{b}{a} \right| < 2$$

を満たす x の範囲は

$$\frac{\boxed{\zeta} + \sqrt{\boxed{\eta}}}{\boxed{\sigma}} < x < \frac{\boxed{\varsigma} + \sqrt{\boxed{\nu}}}{\boxed{\tau}}$$

である。

(数学 I・数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

[2] 100以下の自然数の集合を全体集合 U とし、 U の部分集合 A, B, C を

$$A = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の正の約数}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$$

とする。さらに、 U を全体集合とする A, B, C の補集合をそれぞれ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ とする。

(1) $B \cup C$ の要素の個数は $\boxed{\gamma}$ であり、 $\bar{B} \cap \bar{C}$ に属する最小の自然数は $\boxed{\epsilon}$ である。

(2) 次の $\boxed{\chi}$ と $\boxed{\psi}$ に当てはまるものを、下の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 n が A に属することは、自然数 n が B に属するための $\boxed{\chi}$ 。

自然数 n が U に属する 9 の倍数であることは、自然数 n が $\bar{A} \cap C$ に属するための $\boxed{\psi}$ 。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが、十分条件でない
- ③ 十分条件であるが、必要条件でない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

(3) a を 100 以下の自然数とする。また、 U の部分集合 D を

$$D = \{x \mid x \text{ は } a \text{ の正の約数}\}$$

とする。このとき

命題「自然数 n が $B \cup C$ に属するならば自然数 n は D に属する」

が真である命題となるような a は全部で $\boxed{\tau}$ 個ある。

答・解説

答

第1問

[1]

$$ab = \boxed{ア} \rightarrow ab = \boxed{1}$$

採点基準 アに …3点

$$\frac{b}{a} = \frac{\boxed{イ} + \sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\boxed{3} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

採点基準 イ, ウ, エに …3点 (完答)

$$x = \boxed{オカ}, \boxed{キ} \rightarrow x = \boxed{-1}, \boxed{3}$$

採点基準 オ, カに …1点 (完答)

キに …1点

$$\frac{\boxed{クケ} + \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}} < x < \frac{\boxed{シ} + \sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$$

$$\rightarrow \frac{\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}} < x < \frac{\boxed{7} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

採点基準 ク, ケ, コ, サに …1点 (完答)

シ, ス, セに …1点 (完答)

[2]

$$(1) \boxed{ソ} \rightarrow \boxed{8}$$

採点基準 ソに …2点

$$\boxed{タ} \rightarrow \boxed{5}$$

採点基準 タに …2点

$$(2) \boxed{チ} \rightarrow \boxed{②}$$

採点基準 チに …2点

$$\boxed{ツ} \rightarrow \boxed{①}$$

採点基準 ツに …2点

$$(3) \boxed{テ} \rightarrow \boxed{2}$$

採点基準 テに …2点

解説

第1問

[1]

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, b = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{であるから,}$$

$$ab = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$= \frac{5 - 1}{4}$$

$$= \boxed{1},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{\boxed{3} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である。

このとき, 方程式 $|x - ab| = 2$ を解くと,

$$|x - 1| = 2$$

$$x - 1 = \pm 2$$

$$x = \boxed{-1}, \boxed{3}$$

である。

また, 不等式 $|x - \frac{b}{a}| < 2$ を解くと,

$$\left| x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right| < 2$$

$$-2 < x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 2$$

$$-2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}} < x < \frac{\boxed{7} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である。

[2]

U の部分集合 A, B, C の要素を具体的に書くと,

$$A = \{1, 2, 3, 6\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

である.

(1) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$

であるから, $B \cup C$ の要素の個数は 8 である.

また,

$$\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{B \cup C}$$

であり,

「 $B \cup C$ に, 1, 2, 3, 4 は属し, 5 は属していない」

すなわち

「 $\overline{B \cup C}$ に, 1, 2, 3, 4 は属さず, 5 は属している」

ことから, $\overline{B} \cap \overline{C}$ に属する最小の自然数は 5 である.

(2) $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるから,

「自然数 n が A に属するならば自然数 n は B に属する」は真であり,

「自然数 n が B に属するならば自然数 n は A に属する」は偽である.

よって, 自然数 n が A に属することは, 自然数 n が B に属するための十分条件で

あるが, 必要条件でない. すなわち, チ は ② である.

$\overline{A} \cap C$ は, C の要素のうち, A に属さない要素の集合であるから,

$$\overline{A} \cap C = \{9, 18\}$$

である.

一方, U には, 27以上の9の倍数も含まれるから,

「自然数 n が U に属する9の倍数ならば自然数 n は $\overline{A} \cap C$ に属する」は偽であり,

「自然数 n が $\overline{A} \cap C$ に属するならば自然数 n は U に属する9の倍数」は真である.

よって, 自然数 n が U に属する9の倍数であることは, 自然数 n が $\overline{A} \cap C$ に属する

ための必要条件であるが, 十分条件でない. すなわち, ツ は ① である.

(3) 命題「自然数 n が $B \cup C$ に属するならば自然数 n は D に属する」

すなわち $B \cup C \subset D$ とは,

「100以下の12の正の約数と18の正の約数がすべて D に属する」

ということであるから, これが真となる条件は, a が 12 と 18 の公倍数すなわち 36 の倍数であることがある.

よって, 命題が真となるような a は,

$$a = 36, 72$$

の 2 個ある.