2　曲線の媒介変数表示

単位円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は,

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi) \qquad \cdots (*)$$

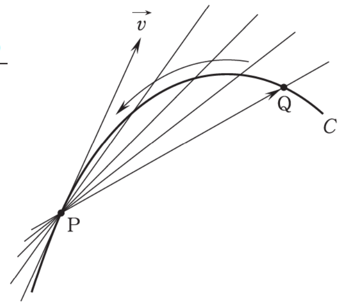
と表される.

逆に, (*) を満たす x, y を座標にもつ点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は, t を $0 \leqq t < 2\pi$ の範囲で変化させれば単位円 C 上をくまなく動く. つまり, P の軌跡が単位円 C となる. その意味で, (*) は単位円 C を表していると言える.

一般に, 曲線 C 上の点 P の x 座標, y 座標を変数 t の関数で表し, t が変化するときの P の軌跡として曲線 C を表現することを, 曲線 C の媒介変数表示といい, t を媒介変数という.

3　媒介変数表示の微分

曲線 $C: \begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ に対して, ベクトル $\vec{v}=\big(f'(\alpha),\ g'(\alpha)\big)$ を考える.



$$f'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}, \qquad g'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$$

であるから, まず,

$$\vec{w}=\left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h},\ \frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}\right)$$

を考えると,

$$\vec{w}=\frac{1}{h}(f(\alpha+h)-f(\alpha),\ g(\alpha+h)-g(\alpha))$$

よって, C 上の点で $t=\alpha$ に対応する点を P, $t=\alpha+h$ に対応する点を Q とすると,

$$\mathrm{P}(f(\alpha),\ g(\alpha)), \qquad \mathrm{Q}(f(\alpha+h),\ g(\alpha+h)), \qquad \vec{w}=\frac{1}{h}\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\frac{1}{h}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

したがって, $\vec{w}\neq\vec{0}$ のとき, $\vec{w}$ は直線 PQ に平行なベクトルである.

ここで, $h\longrightarrow 0$ とすると, Q は P に限りなく近づき, 直線 PQ は P における接線に限りなく近づく.

したがって, $\vec{v}\neq\vec{0}$ のとき, $\vec{v}$ は P における曲線 C の接線に平行である.

また, このことから, $f'(\alpha)\neq 0$ のとき, P における曲線 C の接線の傾きは $\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ となることがわかる. したがって,

6・3　媒介変数 θ によって，

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表される曲線を C とする．C の概形を xy 平面上に図示せよ．また，$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

6・4　曲線 $y=\sin x$ $(0<x<\pi)$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ をとる．原点を O，P から y 軸に下ろした垂線の足を H とし，三角形 OPH を y 軸のまわりに 1 回転して得られる円錐の体積を $V(t)$ とする．

(1)　t の関数として，$V(t)\ (0<t<\pi)$ を求めよ．

(2)　$V(t)$ はある 1 点 $t=t_0$ で最大値をとることを示せ．また，$\dfrac{2}{3}\pi < t_0 < \dfrac{3}{4}\pi$ を示せ．

(3)　$V(t_0) = -\dfrac{\pi}{6}{t_0}^3\cos t_0$ を示せ．また，$V(t_0) < \dfrac{9\sqrt{2}}{256}\pi^4$ を示せ．