第 2 講　多変数の扱い

1　等式の条件付きの 2 変数関数の値域

実数 $x,\ y$ が

$$G(x,\ y)=0$$

を満たすとき，関数

$$z=f(x,\ y)$$

の値域を求めるには，例えば次のような方法がある．(**例題 2・1** 参照)

(1)　$x,\ y$ の連立方程式

$$G(x,\ y)=0 \quad \text{かつ} \quad f(x,\ y)=z$$

が実数解をもつ条件を調べる．

(2)　xy 平面上の 2 曲線

$$G(x,\ y)=0, \qquad f(x,\ y)=z$$

が共有点をもつ条件を調べる．

(3)　$G(x,\ y)=0$ より，$x,\ y$ を媒介変数表示し，それを $z=f(x,\ y)$ に代入する．

2　独立 2 変数関数，不等式の条件付きの 2 変数関数の最大・最小

$x,\ y$ が独立に，ある領域を動くとき，関数 $z=f(x,\ y)$ の最大値・最小値を求めるには，次のような方法がある．

(1)　まず，x または y を固定する．例えば，x を固定した場合，y だけを動かして y の 1 変数関数 $z=f(x,\ y)$ の最大値 $M(x)$，最小値 $m(x)$ を求める．次に，$M(x)$，$m(x)$ を x の関数とみなし x を変化させて $M(x)$ の最大値 M，$m(x)$ の最小値 m を求めれば，これらが求める $z=f(x,\ y)$ の最大値，最小値となる．(**例題 2・2**，**例題 2・3** 参照)

(2)　$x,\ y$ の式を置き換えることにより，$z=f(x,\ y)$ を 1 変数関数にする．(**例題 2・4** 参照)

(注)　(1) の解法において，まず x と y のどちらを固定するかというのは 1 つの問題であるが，一般に “次数が高い方の文字” あるいは “次数が等しい場合はその式に現れている回数の多い方の文字” すなわち

「より扱いにくい方の文字をまず固定する」

と処理しやすい場合が多い．

例題 2・3

$x,\ y$ が $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \pi$ を満たして変化するとき，

$$f(x,\ y)=3\sin x-4\cos y$$

の最大値，最小値を求めよ．

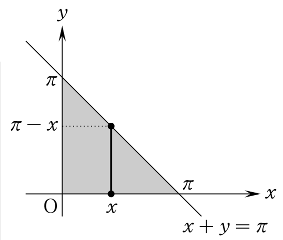
解答

まず x を固定して考える．x を固定したとき，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \pi$ より，y のとり得る値の範囲は

$$0 \leqq y \leqq \pi - x$$

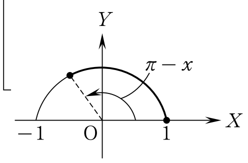
であり，この範囲における $f(x,\ y)$ の最大値を $M(x)$，最小値を $m(x)$ とおく．

☜ $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \pi$ を満たす領域は下図の網掛け部分（境界を含む）であり，x を固定すると y のとり得る値の範囲は $0 \leqq y \leqq \pi - x$ である．



$0 \leqq y \leqq \pi - x\ (\leqq \pi)$ において，$\cos(\pi - x) \leqq \cos y \leqq \cos 0$ であるから，

☜



$$\begin{aligned} M(x) &= f(x,\ \pi - x) \\ &= 3\sin x - 4\cos(\pi - x) \\ &= 3\sin x + 4\cos x, \\ m(x) &= f(x,\ 0) \\ &= 3\sin x - 4. \end{aligned}$$

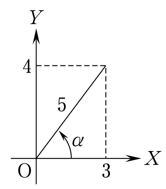
次に，x を $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で変化させて $M(x)$ の最大値と $m(x)$ の最小値を求める．

まず，$M(x)$ は $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ を満たす鋭角 α を用いて，

$$M(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\alpha)$$

と変形できる．

☜

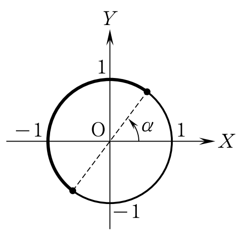


$0 \leqq x \leqq \pi$ より，

$$\alpha \leqq x + \alpha \leqq \pi + \alpha$$

であるから，$M(x)$ は $x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる．

☜



よって，$f(x,\ y)$ の最大値は，

$$5.$$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$m(x) = 3\sin x - 4$ は $x = 0,\ \pi$ のとき最小となる．

よって，$f(x,\ y)$ の最小値は，

$$-4.$$

例題 8・7

xyz 空間に点 P(0, 0, 5) がある．球面 $x^2+y^2+(z-2)^2=9$ と平面 $x=\frac{1}{2}$ が交わってできる円を C とする．

(1) C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) C 上に点 Q をとったとき，2 点 P，Q を通る直線と xy 平面との交点を R$(X,\ Y,\ 0)$ とする．Q が C 上を動くとき，R の軌跡を求めよ．

解答

(1) $x^2+y^2+(z-2)^2=9$ に $x=\frac{1}{2}$ を代入して

$$y^2+(z-2)^2=\frac{35}{4}.$$

ゆえに，

$$C\text{ の中心は }\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 2\right),\quad \text{半径は }\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

(2) Q$\left(\frac{1}{2},\ s,\ t\right)$ とすると，Q は PR 上の点なので $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ （k は実数）とおける．

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PR}}.$$

$$\left(\frac{1}{2},\ s,\ t\right)=(0,\ 0,\ 5)+k(X,\ Y,\ -5).$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=kX, & \cdots ①\\ s=kY, & \cdots ②\\ t=5-5k. & \cdots ③\end{cases}$$

① より，$X\neq 0$ であり，$k=\frac{1}{2X}$.

②，③ に代入して，

$$s=\frac{Y}{2X},\quad t=5-\frac{5}{2X}. \quad \cdots ④$$

ここで Q は円 C 上にあるから，

$$s^2+(t-2)^2=\frac{35}{4} \quad \cdots ⑤$$

を満たす．④ を ⑤ に代入して，

$$\left(\frac{Y}{2X}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2X}\right)^2=\frac{35}{4}.$$

$$Y^2+(6X-5)^2=35X^2.$$

$$X^2-60X+25+Y^2=0.$$

$$(X-30)^2+Y^2=875 \quad (X\neq 0 \text{ を満たす}).$$

よって，R の軌跡は，

$$\text{円}\ (x-30)^2+y^2=875 \quad \text{かつ} \quad z=0.$$