第11講　2次関数の応用

1　2次方程式の解の範囲

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸（直線 $y=0$）の共有点の x 座標である．

したがって，$y=f(x)$ のグラフを調べれば，$f(x)=0$ の実数解の個数やおおよその値がわかる．

例1　2次方程式 $x^2-4x+a=0$ の異なる実数解の個数を調べてみよう．

2次関数 $y=x^2-4x+a$ について，

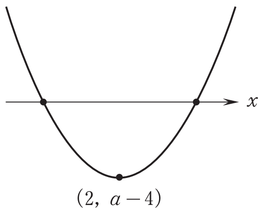
$$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$$

より，このグラフの頂点の y 座標は $a-4$ である．

・$a-4<0$ のとき，

$$a<4$$

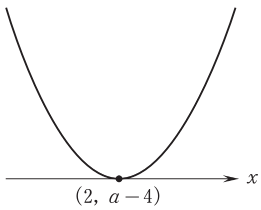
であり，このとき2次関数 $y=x^2-4x+a$ のグラフは x 軸と共有点を2つもつから，2次方程式 $x^2-4x+a=0$ は異なる2つの実数解をもつ．



・$a-4=0$ のとき，

$$a=4$$

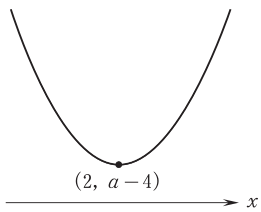
であり，このとき2次関数 $y=x^2-4x+a$ のグラフは x 軸と接するから，2次方程式 $x^2-4x+a=0$ は異なる実数解を1つだけもつ．この解を重解という．



・$a-4>0$ のとき，

$$a>4$$

であり，このとき2次関数 $y=x^2-4x+a$ のグラフは x 軸と共有点をもたないから，2次方程式 $x^2-4x+a=0$ は実数解をもたない．



以上より，2次方程式 $x^2-4x+a=0$ の異なる実数解の個数は，

$$\begin{cases} a < 4 \text{ のとき}, 2 \text{ 個}, \\ a = 4 \text{ のとき}, 1 \text{ 個}, \\ a > 4 \text{ のとき}, 0 \text{ 個}. \end{cases}$$

このように，2 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は，2 次関数 $y=f(x)$ の頂点の y 座標の符号を調べることによって求めることができる．

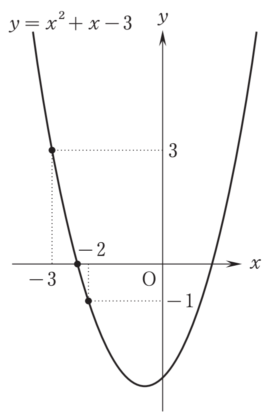
問 1 2 次方程式 $x^2+2x-a=0$ の異なる実数解の個数を実数 a の値で場合分けして求めよ．

例 2 2 次方程式 $x^2+x-3=0$ が $-3<x<-2$ の範囲に小さい方の解をもつことを示せ．

解 $f(x)=x^2+x-3$ とおくと，

$$f(-3)=(-3)^2+(-3)-3=3>0,$$
$$f(-2)=(-2)^2+(-2)-3=-1<0$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．



図より，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と共有点を 2 つもち，左側の共有点の x 座標は -3 と -2 の間にある．

$f(x)=0$ の実数解は $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標であるから，$f(x)=0$ の小さい方の解は $-3<x<-2$ の範囲にある．

問 2 2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ が $3<x<4$ の範囲に大きい方の解をもつことを示せ．

練習▶▶▶

11・1　2次関数 $y=x^2-2ax+a^2-a+3$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

11・2　(1)　2次関数 $y=x^2-2x+a+2$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ．

(2)　x の2次関数 $y=x^2-2px+p^2-1$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる2点で交わるような p の値の範囲を求めよ．

11・3 xについての2次方程式 $x^2-2ax+2a^2-2a-4=0$ が $x>2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．